이산수학

정 주 희
경북대학교 수학교육과

2022년 3월 2일

차 례

1 시작하면서

1.1 NIM

NIM은 "일단의 대상을 두고 두 사람이 번갈아 가면서 가져가는 게임"이라고 했다. (p26) 여기서는 NIM의 정확한 수학적 정의를 내리지는 않고 예를 몇 개 들면서 알아보기로 하겠다.

<u>예제</u> 1.1 (p25: 1.2.5) 16개의 동전이 탁자 위에 놓여 있다. 갑과 을이 게임을 하는데 갑부터 시작하여 번갈아 한 번에 4개 이하의 동전을 가지고 갈 수 있다. 맨 마지막 동전을 가지고 가는 사람이 이긴다고 할 때 갑이 이기기 위한 전략은?

(풀이). 이 게임의 "상태"는 현재까지 가져간 동전의 개수로 나타낼 수 있다. 상태들의 전체 집합은 $S \overset{\text{def}}{=} \{0, \ldots, 16\}$이고 "종료 승리상태"는 $w = 16 \in S$이다. 종료 승리상태를 만드는 사람이 이긴다.

"승리상태 집합"을 $W = \{16, 11, 6, 1\}$로 정의하면 이 집합은 다음의 성질을 가진다: (1) W에 속하는 상태를 받은 사람이 move 하면 <u>반드시</u> W 밖으로 나간다. (2) W의 여집합에 속하는 상태를 받은 사람은 <u>잘 하면</u> W 안으로 들어올 수 있다. (3) 종료 승리상태 w는 W의 원소이다.

처음에 갑이 받은 상태 0은 W 바깥의 원소이므로 1개를 가져가서 상태 $1 \in W$를 만들고, 이후로 계속 W의 원소만 상대방에게 되돌려 주면 이긴다. ⊣

NIM 게임에서의 승리상태 집합의 성질 (1), (2), (3)을 좀 더 수학적으로 정의하면 다음과 같다. 함수 $f : S \to \mathcal{P}(S)$를

$$f(x) = \{y \mid y \text{ is obtained from } x \text{ by a single move}\} \tag{$*$}$$

로 정의하면

$$\begin{array}{rl} (i) & (\forall x \in W)(f(x) \cap W = \varnothing) \\ (ii) & (\forall x \notin W)(f(x) \cap W \neq \varnothing) \\ (iii) & w \in W \end{array} \tag{$**$}$$

<u>예제</u> 1.2 위에서 정의한 f에 대하여 $f(0)$, $f(1)$, $f(12)$를 계산하고 이들이 ($**$)를 만족함을 확인하여라. ⊣

<u>예제</u> 1.3 (p26: 게임 ①) 2개의 통에 각각 m, n 개의 동전이 담겨 있다. 갑과 을이 게임을 하는데 규칙은 다음과 같다.

(1) 갑부터 시작하여 번갈아 1개 이상의 동전을 가져간다.

(2) 한 번 가져갈 때는 하나의 통에서만 가져간다. (한 통에서 1개, 다른 통에서 2개 이런 식으로 가져갈 수 없다.)

(3) 마지막 동전을 가져가는 사람이 이긴다.

승리전략을 구하여라. ($*$)에서 정의한 f에 대하여 $f(2, 3)$은 무엇인가?

(풀이).

$$
\begin{aligned}
&S = \{(i,j) \mid 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n\} \\
&W = \{(i,i) \mid 0 \le i \le \min(m,n)\} \\
&w = (0,0)
\end{aligned}
$$

조건 (∗∗)가 만족됨을 확인할 수 있을 것이다. $m \neq n$인 상태에서 게임을 시작하면 갑이 이길 수 있다.

예를 들어 $f(2,3) = \{(0,3),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2)\}$에는 W의 원소 $(2,2)$가 존재한다. ⊣

<u>예제</u> 1.4 (p27: 게임 ②) $k \ge 3$ 개의 통에 각각 $n_1, \ldots, n_k$ 개의 동전이 담겨있다. 규칙은 게임 ①에서와 같다.

(풀이). $k = 3$, $n_1 = 1$인 경우를 예로 하여 설명을 시작하겠다.

$$
\begin{aligned}
&S = \{(i,j,\ell) \mid 0 \le i \le 1,\ 0 \le j \le n_2,\ 0 \le \ell \le n_3\} \\
&W = \{\vec{x} \in S \mid (\exists m)\big(\vec{x} = (1,2m,2m+1) \text{ or } \vec{x} = (1,2m+1,2m) \text{ or } \vec{x} = (0,m,m)\big)\} \\
&w = (0,0,0)
\end{aligned}
$$

승리집합 조건 (∗∗)이 만족됨을 확인할 수 있을 것이다. ⊣

우리는 승리집합 조건을 함수 $f : S \to \mathcal{P}(S)$를 사용하여 나타내었는데, 다음과 같이 2항관계 $\rightsquigarrow$를 사용하는 방법도 있다. 각 $x, y \in S$에 대하여

$$
x \rightsquigarrow y \ \Leftrightarrow\ y \text{ is obtained from } x \text{ by a single move} \tag{1.1}
$$

로 정의하면 (∗∗)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&(i)\ (\forall x \in W)(\forall y \in S)(x \rightsquigarrow y \to y \notin W) \\
&(ii)\ (\forall x \notin W)(\exists y \in W)(x \rightsquigarrow y) \\
&(iii)\ w \in W
\end{aligned}
\tag{∗∗∗}
$$

NIM의 예를 하나 더 들어 보겠다. $k = 3$이고 $n_1 = 14$, $n_2 = 3$, $n_3 = 7$로 둔다. S와 w는 당연한 방법으로 정의하면 되므로 이들에 대한 정의는 생략하기로 하자. W의 정의는 좀 복잡하다. 일단 $(i,j,\ell) \in S$의 각 성분을 2진법으로 나타낸다. 예를 들어 초기 상태 $(14,3,7)$은

14	=	1	1	1	0
3	=	0	0	1	1
7	=	0	1	1	1

이다. 이 표의 오른쪽 부분의 3×4 행렬에 주목한다. 각 열에 대해서 1의 개수가 짝수개인 것을 짝수열, 홀수인 것을 홀수열이라고 부른다. 위의 행렬에서 왼쪽에서 1번째와 3번째 열이 홀수열이고, 2번째와 4번째 열은 짝수열이다.

이제 W는

“모든 열이 짝수열인 상태”

들의 집합으로 정의한다. 이제 $(***)$에서 기술한 조건 (i), (ii), (iii)이 모두 만족됨을 보이겠다. 우선 (iii)는 아주 쉽게 확인된다.

(i)이 만족됨을 확인해 보기 위하여 위의 예에서 14개의 동전이 들어 있는 통에서 10개를 꺼내 보자. 결과로 얻은 상태 x는 다음과 같다.

4	=	0	1	0	0
3	=	0	0	1	1
7	=	0	1	1	1

$x \in W$는 쉽게 확인된다. 이런 승리상태에서 어느 통이든 하나를 골라 몇 개든 동전을 꺼내면 그 결과로 얻은 상태는 반드시 홀수열을 포함하게 됨을 보여야 한다. 조금만 생각해 보면 이건 지극히 당연하다. 하나의 행을 골라 그것의 숫자를 줄이면 그 행에 속하는 적어도 하나의 열은 바뀌어야 한다. 0이었다면 1로, 그리고 1이었다면 0으로. 그러므로 행렬에서 그 열은 1이 하나 늘거나 줄어들게 되며, 따라서 짝수열이었던 것이 홀수열로 바뀌게 될 것이다.

(ii)가 만족됨을 보이는 것이 가장 까다롭다. 홀수열이 단 하나만 있는 상태라면 쉽다. 그리고 홀수열이 여러 개 있다 해도, 그 모든 홀수열들에서 1을 가지는 행이 존재한다면 쉽다. 왜냐하면 이런 경우에는 그 행에 속한 홀수열들에 있는 숫자만 1에서 0으로 바꾸면 되기 때문이다. $(14,3,7)^T$에서 $(4,3,7)^T$를 얻은 것이 바로 이런 경우에 해당한다. $(12,3,5)^T \notin W$ 같은 경우는 조금 더 까다롭다.

12	=	1	1	0	0
3	=	0	0	1	1
5	=	0	1	0	1

첫째 열과 셋째 열이 홀수열인데, 이 두 열에서 모두 1을 가지고 있는 행은 없기 때문이다. 그러나 여기서 잘 생각해 보면, 홀수열에서 1을 없애는 것이 아니라 새로 만들어 내도 된다! 그러므로 첫째 행에서 첫째 열은 1을 0으로 바꾸고, 셋째 열은 0을 1로 바꾸면 된다. 즉, 12개의 동전 중에 6개를 꺼내서 6개를 남겨 두면 아래와 같이 W의 원소를 얻게 된다.

6	=	0	1	1	0
3	=	0	0	1	1
5	=	0	1	0	1

이제 일반적인 비승리상태 $x \notin W$에서 승리상태 $x \rightsquigarrow y \in W$를 얻는 방법을 설명하겠다. x를 나타내는 행렬에는 반드시 홀수열이 있다. 홀수열 중에 가장 왼쪽의 것을 골라 거기서 1을 가진 행을 찾는다. 이런 행이 여러 개 있다면 아무거나 하나 고르면 된다. 이 행을 R이라 하고, 여기서 몇 개의 동전을 빼서 승리상태를 얻을 수 있음을 보이겠다.

홀수열들을 왼쪽부터 차례로 $C_1, \ldots, C_m$이라 하자. 그리고 C_1은 2^{d_1}, C_2는 2^{d_2}, $\ldots$, C_m은 2^{d_m}에 대응된다 하자. 그러면 $d_1 > d_2 > \cdots > d_m$이 성립할 것이다. R은 C_1에서 1일 것이다. R에서 2^{d_1} 개의 동전을 빼 둔다. (빼서 버리는 것이 아니라 일단 가지고 있는다.) 그러면 이제 홀수열은 하나 줄어들어 $C_2, \ldots, C_m$가 남아 있을 것이다. 이제 R의 C_2가 0이라면 R에 2^{d_2} 개의 동전을 넣어 주고, R의 C_2가 1이라면 R에서 2^{d_2} 개의 동전을 더 뺀다. 이제 C_2는 짝수열이 되었을 것이다. 이런 식으로 C_m까지 계속 작업한다. 이러한 작업은 가능하다, 왜냐하면 2^{d_1}은 $2^{d_2} + \cdots + 2^{d_m}$보다 크기 때문이다. □

연습문제 1.5 $(13, 17, 35, 38)^T$를 승리상태로 바꾸려면 어떻게 해야 하겠는가? $(14, 25, 40, 54)^T$는 어떠한가? ⊣

연습문제 1.6 3 무더기의 동전을 가지고 하는 NIM 게임의 상태를 $\{n_1, n_2, n_3\}$로 나타내었을 때 $n_1 = 1$, $n_2 = 2n$이면 $n_3 = 2n + 1$로 만들면 승리상태가 됨을 보았다. 이를 짝수열의 개념을 사용하여 설명하여라.

만일 $n_1 = 2$, $n_2 = 4n + 1$이면 n_3를 어떻게 만들어야 승리상태가 되겠는가? $n_2 = 4n + 2$이면 어떻게 되는가? 승리상태 중에 $n_1 = 3$인 것들의 집합 W_3를 기술하여라. 또한 $n_1 = 4$, $n_1 = 5$에 대한 W_4와 W_5도 각각 기술하여라. ⊣

2 순열과 조합

2.1 순열과 조합의 기본

(p37, pp46–47) (유한)집합 X의 순열(*permutation*)은 X의 모든 원소를 "중복과 누락없이 일렬로 나열한 것"이다. 흔히 순열을 순열의 개수와 혼동하는데 이는 바람직하지 않다. 또한 '순열의 개수'를 '순열의 수'라고 쓰는 경우도 흔한데 이것 역시 피해야 할 표현이라고 본다.

위의 정의를 엄격하게 하자면 집합 X의 순열은 X의 원소의 개수를 n이라 했을 때 $|X| \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$에서 X로 가는 전단사 함수를 뜻한다.

X의 일부 원소만 취하여 일렬로 나열한 것도 순열이라 한다. $k \leq |X|$ 개의 원소를 취하여 일열로 배열한 것을 X의 k-순열이라고 하며 수학적으로는 단사함수 $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to X$로 나타낼 수 있다.

$X = \{a, b, c, d\}$일 때 X의 3-순열 중 2개, σ_1과 σ_2를 아래에 보였다.

$$\sigma_1(1) = c, \sigma_1(2) = b, \sigma_1(3) = a$$
$$\sigma_2(1) = b, \sigma_2(2) = d, \sigma_2(3) = c$$

순열을 나타낼 때 위와 같이 쓰는 것은 번거롭고 불편하므로 그 대신 통상 아래와 같이 나타낸다.

$$\sigma_1 = cba, \quad \sigma_2 = bdc$$

순열을 함수로 보면 순열의 합성 등을 자연스럽게 생각할 수 있다. 이에 대한 내용은 교재의 pp46–50에 나오는데 이것은 통상 이산수학에서보다는 추상대수학(abstract algebra)에서 많이 다루는 토픽이다.

원소의 개수가 n인 집합을 n-집합이라고 부르기로 한다. n-집합의 k-순열의 개수는

$$_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k\text{ 개}} \tag{2.1}$$

로 주어지며 이는 교재에 나와 있는 대로 (p38: 정리 2.1.1) 점화식

$$_nP_0 = 1$$
$$_nP_k = {_nP_{k-1}} \cdot (n - (k-1)) \tag{2.2}$$

을 써서 (k에 대한 수학적 귀납법을 이용하여) 증명할 수 있다. 점화식 (2.2)가 성립하는 이유를 수학적으로 엄격하게 설명하기 위하여는, n-집합의 k-순열들의 집합에 "순열의 앞부분의 $k-1$부분수열이 동일함"이라는 동등관계를 주어 분할하면 동등류들의 개수가 ${}_nP_{k-1}$이고 각 동등류의 원소의 개수는 $n-(k-1)$로 일정하다는 사실을 이용하면 된다.

이것보다 좀 더 흥미로운 점화식으로

$$
\begin{aligned}
&{}_nP_0 = 1 \\
&{}_nP_k = {}_{n-1}P_k + k \cdot {}_{n-1}P_{k-1} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

가 있다. n이 나타나는 순열들과 그렇지 않은 순열들로 분할하여 생각하면 이 점화식을 설명할 수 있을 것이다. 이 점화식을 이용하여 (2.1)을 증명해 보라.

연습문제 2.1 점화식

$$
{}_nP_0 = 1, \quad {}_nP_k = n \cdot {}_{n-1}P_{k-1}
$$

은 어떤가? 여기에서는 어떠한 분할이 사용되었는가? ⊣

집합의 k-부분집합은 그 집합의 부분집합으로서 원소의 개수가 k인 것을 말한다. 집합의 k-조합(*combination*)은 곧 k-부분집합을 뜻한다. n-집합의 k-조합의 개수는

$$
{}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{{}_nP_k}{k!} \qquad (2.4)
$$

로 주어지며 이는 교재의 (53쪽: 정리 2.2.1)에 있듯이 ${}_nP_k = {}_nC_k \cdot k!$로부터 유도할 수도 있고, (교재 88쪽, 강의노트 14쪽)에 있듯이 파스칼의 삼각형에서 ㄱ-법칙이 성립함을 이용하여 수학적 귀납법으로 증명할 수도 있다.

$\binom{n}{k}$는 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 "증가하는 k-수열"(순증가 k-수열)들의 개수와 같다. 예를 들어 $k=3$일 때 $\binom{n}{3} = \left|\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid 1 \le x_1 < x_2 < x_3 \le n\}\right|$이다.

주의 2.2 식 (2.4)는 $n < k$, 또는 $k < 0$인 경우에는 계산할 수 없는데 이런 경우에는 ${}_nC_k = 0$로 두기로 한다. ⊣

순열과 조합의 개수에서 자주 등장하는 팩토리얼 함수 $n!$은 n이 커짐에 따라 대단히 빨리 증가하는 특성을 가지고 있는데, 큰 n에 대하여 $n!$이 몇 자리 수인가, 즉 $n! = \alpha \times 10^m$, $|\alpha| < 1$으로 두었을 때 m의 대략적인 값을 (계산기를 써서) 알아보려면 스털링의 공식을 쓰면 된다. (교재 42쪽)

$$
n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (2.5)
$$

2.2 여러 가지 순열·조합

이 절에서 우리는 일반화된 조합, 다중집합의 순열, 중복순열, 중복조합 등의 개념들을 공부할 것이다.

정의 2.3 (P70) "집합 X의 원소들을 서로 구별되는, 크기가 정해진 k개의 상자에 나누어 넣은 것"을 X의 일반화된 조합이라고 한다. 이 정의에서 겹따옴표 안의 내용을 좀 더 수학적으로

엄격하게 말해 보자. $|X| = n$으로 두고, 각 상자의 크기를 $n_1, \ldots, n_k$라 하자.

$n_1 + \cdots + n_k = n$을 만족하는 음아닌 정수 $n_1, \ldots, n_k$이 주어졌을 때 집합

$$\{(X_1, \ldots, X_k) \mid |X| = n,\ |X_i| = n_i,\ \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X\} \tag{2.6}$$

의 원소들을 일반화된 조합이라 하고, 이 집합의 원소의 개수를

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = C(n; n_1, \ldots, n_k)$$

로 나타낸다. ⊣

집합 (2.6)의 조건으로부터 X_i들은 쌍마다 서로소임을 알 수 있다.

<u>단평</u> 2.4 수학에서는, 특히 이산수학에서는 "..."를 많이 사용하는데 이런 경우 반드시 초항과 말항 그리고 원소의 개수를 명확히 밝혀 두는 것이 좋다. 무한수열에서는 처음 몇 개의 항의 값들과 아울러 항의 개수가 무한임을 적시하도록 한다. ⊣

<u>예제</u> 2.5 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때 X의 (2,1,2)-조합은 (X_1, X_2, X_3) 형태이며 이때 X_i들은 X의 분할을 이루고, $|X_1| = 2$, $|X_2| = 1$, $|X_3| = 2$이다. 이들의 총 개수는 $\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30$이다. 이들 중에 $1 \in X_1$, $2 \in X_2$인 것들을 모두 나열하면 $(\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\})$, $(\{1, 4\}, \{2\}, \{3, 5\})$, $(\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 4\})$의 3개가 있다. ⊣

<u>단평</u> 2.6 (P71: 2.3.5) $\binom{n}{n_1, \ldots, n_k}$의 값을 구하기 위하여 $k = 4$인 경우를 생각해 보면

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n_1, \ldots, n_4} &= \binom{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{n_1} \binom{n_2 + n_3 + n_4}{n_2} \binom{n_3 + n_4}{n_3} \binom{n_4}{n_4} \\
&= \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)!}{n_1!(n_2 + n_3 + n_4)!} \frac{(n_2 + n_3 + n_4)!}{n_2!(n_3 + n_4)!} \frac{(n_3 + n_4)!}{n3!(n_4)!} \frac{(n_4)!}{n_4!(0)!} \\
&= \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)!}{n_1! n_2! n_3! n_4!} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! n_4!}
\end{aligned}$$

를 얻는다. 일반적으로

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = C(n; n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \tag{2.7}$$

이 된다.

일반화된 조합에서 $k = 2$인 경우는 $X_1^c = X_2$이고 $\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot (n - n_1)!}$이므로 이것은 곧 통상적인 조합이다. 즉, $\binom{n}{r} = \binom{n}{r,\, n-r}$이다. ⊣

<u>정의</u> 2.7 (P66, P72) 원소의 중복을 허용하는 집합을 <u>다중집합</u>이라고 하고

$$\{\overbrace{a_1, \ldots, a_1}^{n_1\text{개}}, \overbrace{a_2, \ldots, a_2}^{n_2\text{개}}, \ldots, \overbrace{a_k, \ldots, a_k}^{n_k\text{개}}\} = \{n_1 \times a_1, n_2 \times a_2, \ldots, n_k \times a_k\}$$

로 나타낸다. 이 다중집합의 순열을 <u>일반화된 순열</u>이라고 하고 이들의 개수를 $P(n; n_1, \ldots, n_k)$로 나타낸다. ⊣

단평 2.8 다중집합의 순열을 응용하는 대표적인 문제로 바둑판 도로망에서의 (2차원 또는 3차원) 최단경로 문제가 있다. (p74) 도로망의 일부가 막혀 있을 때의 문제들도 생각해 보라. ⊣

예제 2.9 다중집합 $\{2\times a_1, 1\times a_2, 2\times a_3\}$의 순열은 $y_1y_2y_3y_4y_5$ 형태이며, 이때 $y_j \in \{a_1, a_2, a_3\}$이고 $\big|\{j \mid y_j = a_1\}\big| = 2$, $\big|\{j \mid y_j = a_2\}\big| = 1$, $\big|\{j \mid y_j = a_3\}\big| = 2$이다.

이 일반화된 순열들 중에 첫째 원소가 a_1, 둘째 원소가 a_2인 것은 $a_1a_2a_1a_3a_3$, $a_1a_2a_3a_1a_3$, $a_1a_2a_3a_3a_1$ 등 3개가 있다.

이 3개 중 첫번째인 $a_1a_2a_1a_3a_3$에서 a_1의 '위치'들의 집합을 X_1, a_2의 '위치'들의 집합을 X_2, a_3의 '위치'들의 집합을 X_3라 하면 $X_1 = \{1,3\}$, $X_2 = \{2\}$, $X_3 = \{4,5\}$, 즉 $(X_1, X_2, X_3) = (\{1,3\},\{2\},\{4,5\})$이며 이것은 $\{1,2,3,4,5\}$의 $(2,1,2)$-조합이다.

$a_1a_2a_3a_1a_3$와 $a_1a_2a_3a_3a_1$에 대해서도 이런 작업을 하여 (X_1, X_2, X_3)를 얻으면 이들은 각각 예제 2.5에서 얻은 일반화된 조합들 $(\{1,4\},\{2\},\{3,5\})$, $(\{1,5\},\{2\},\{3,4\})$과 대응된다. ⊣

정리 *2.10* (*p72*)

$$P(n; n_1, \ldots, n_k) = C(n; n_1, \ldots, n_k) \tag{2.8}$$

Proof. $n_1 + \cdots + n_k = n > 0$라 하자.

$|X| = n$인 집합 X의 $(n_1, \ldots, n_k)$-조합은

(1) $|X_i| = n_i$ for $i = 1, \ldots, k$이고

(2) $X_1 \cup \cdots \cup X_k = X$인

$(X_1, \ldots, X_k)$ 를 뜻한다. (이것은 집합론에서 정의하는 X의 '분할'과 무엇이 다른가?) 이러한 '일반화된 조합' 전체의 집합을 C라 했을 때 $|\mathsf{C}|$는 정의에 의해서 $C(n; n_1, \ldots, n_k)$이다.

다중집합 $\{\infty\times a_1, \ldots, \infty\times a_k\}$의 $(n_1, \ldots, n_k)$-순열은 $\{n_1\times a_1, \ldots, n_k\times a_k\}$의 순열을 뜻한다. 이러한 '일반화된 순열' 전체의 입합을 P라 했을 때 $|\mathsf{P}|$는 정의에 의해서 $P(n; n_1, \ldots, n_k)$이다.

$|\mathsf{C}| = |\mathsf{P}|$를 보이기 위하여 일반성의 손실없이 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$으로 가정하고 전단사 함수 $f : \mathsf{C} \to \mathsf{P}$를 다음과 같이 구성한다.

$$\begin{aligned}
&f(\vec{X}) = \vec{y}, \text{ where} \\
&\quad \vec{X} \overset{\text{def}}{=} (X_1, \ldots, X_k), \\
&\quad \vec{y}_j = a_i \iff j \in X_i, \quad (1 \le i \le k,\ 1 \le j \le n).
\end{aligned}$$

먼저 모든 $\vec{X} \in \mathsf{C}$에 대해서 $f(\vec{X}) \in \mathsf{P}$를 보인다. 그 다음 f가 단사임과 전사임을 보인다. □

예제 2.11 $C(8; 3, 2, 3) = |\mathsf{C}|$로 두었을 때 C의 원소 중 하나를 예로 들면

$$(\{1,3,5\},\{6,8\},\{2,4,7\}) \overset{\text{def}}{=} \vec{X}$$

이 있다. $P(8; 3, 2, 3) = |\mathsf{P}|$로 두었을 때 P의 원소 중에 위에서 정의한 $\vec{X}$에 대응하는 것은 무엇인가?

$P(8; 2, 4, 2) = |\mathsf{P}|$로 두었을 때 P의 원소 중 하나를 예로 들면

$$a_3a_2a_2a_3a_1a_2a_1a_2 \overset{\text{def}}{=} \vec{y}$$

가 있다. $C(8;2,4,2) = |\mathsf{C}|$로 두었을 때 C의 원소 중에 위에서 정의한 $\vec{y}$에 대응하는 것은 무엇인가? ⊣

정의 2.12 (p67) 다중집합에서 n_i들이 모두 ∞인 경우를 무한다중집합이라고 부른다. 무한다중집합 $\{\infty\times a_1,\ldots,\infty\times a_n\}$의 k-순열은 n-집합의 k-중복순열이라고 부르고 이것들의 개수는 ${}_n\Pi_k = n^k$ 이다. ⊣

정의 2.13 (p75) 무한다중집합 $\{\infty\times a_1,\ldots,\infty\times a_n\}$의 k-조합을 n-집합의 k-중복조합이라고 부르고 이것들의 개수를 ${}_nH_k$로 나타낸다. ⊣

정의 2.14 정수 $n \geq 0$과 임의의 집합 X에 대하여 "길이가 n인 X의 원소들의 유한열(*finite sequence*)"이란 정의역이 $\{1,2,\ldots,n\}$이고 공역이 X인 함수를 뜻한다. 길이를 언급하지 않고 그냥 "유한열"이라고 한다면 이는 적당한 $n \geq 0$에 대하여 길이가 n인 유한열이라는 뜻이다.

X가 기호들의 집합일 때는 유한열을 문자열(*string*)이라고 한다. '기호'는 무정의 용어이며 직관적으로는 $a,b,\ldots$, $A,B,\ldots$, $0,1,\ldots$, $+,\times,\div,\ldots$ 등을 뜻한다고 보면 된다. 기호를 글자(*letter*)라고 하기도 한다. 기호들로 이루어진 집합을 알파벳(*alphabet*)이라고 한다.

예를 들어 길이 3인 $\{0,1,\ldots,9\}$의 어떤 문자열의 그래프(함수의 그래프를 뜻함.)가 $\{(1,3),(2,8),(3,2)\}$라면 이 문자열은 그냥 편하게 382로 나타내면 된다. ⊣

단평 2.15 이산수학에서는 개수를 세는 문제가 많은데, 이 모든 문제들은 결국 어떤 집합의 원소의 개수를 세는 것으로 귀착된다. 그리고 대부분의 경우 이 집합은 유한열들, 즉 어떤 함수들의 집합이 된다.

예를 들어 n-집합의 k-순열의 개수 ${}_nP_k$는 아래에 보인 집합의 원소의 개수를 뜻한다.

$$\{f \mid \mathrm{Dom}(f)=\{1,\ldots,k\},\ \mathrm{Ran}(f)=\{1,\ldots,n\},\ f\text{는 단사}\} \tag{2.9}$$

n-집합의 k-중복순열의 개수 ${}_n\Pi_k$는 (2.9)의 집합의 조건들 중에서 "f는 단사"를 삭제하여 얻은 집합의 원소의 개수를 뜻한다.

${}_nC_k$에 대응하는 집합은 (2.9)의 집합의 조건에 "f는 증가함수", 즉 $(\forall i<j)(f(i)<f(j))$를 추가하여 얻는다. (이것은 강의노트 6쪽에 설명한 "순증가 k-수열'이다.) 그리고, 곧 이어서 공부하게 될, 중복조합의 개수 ${}_nH_k$에 대응하는 집합은 (2.9)의 집합의 조건들에서 "f는 단사"를 삭제하고 "f는 단조증가함수", 즉 $(\forall i<j)(f(i)\leq f(j))$를 추가하여 얻는다. 다시 말해서 중복조합은 단조증가 k-수열이라고 보면 될 것이다.

조금 더 복잡한 예로 $C(n;n_1,\ldots,n_k)$와 $P(n;n_1,\ldots,n_k)$에 대하여 각각 이에 대응하는 집합 C, P는 아래와 같다.

$$\mathsf{C} = \{f \mid \mathrm{Dom}(f)=\{1,\ldots,k\},\ \mathrm{Ran}(f)=\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}),\ (\forall i\leq k)(|f(i)|=n_i)\},$$
$$\mathsf{P} = \{f \mid \mathrm{Dom}(f)=\{1,\ldots,n\},\ \mathrm{Ran}(f)=\{1,\ldots,k\},\ (\forall i\leq k)(\left|f^{-1}(i)\right|=n_i)\}.$$

위의 내용은 정리 2.10에 이미 나와 있지만, 여기서 엄격하게 함수들의 집합의 형식을 취해 보았다. ⊣

단평 2.16 중복조합의 개수를 계산하는 식으로

$$ {}_nH_r = \binom{n+r-1}{r} \tag{2.10}$$

이 성립한다. 위의 식은 디오판투스 방정식의 해의 개수를 세는 문제에서 유도할 수 있다. ⊣

<u>예제</u> 2.17 <u>디오판투스 방정식</u>

$$x_1 + \cdots + x_n = r, \quad (r \geq 0,\ n \geq 1) \tag{2.11}$$

의 음아닌 정수해의 개수를 구해 보자. 이것은 구별되고 크기가 정해지지 않은 n개의 상자에 구별 안 되는 r개의 바둑알을 넣는 문제로 생각할 수 있다. 즉 상자$_1$, ..., 상자$_n$에 넣은 바둑알의 개수를 각각 $x_1, \ldots, x_n$으로 보는 것이다. 즉, 우리가 구하는 것은 (2.11)을 만족하는 모든 유한열 $(x_1, \ldots, x_n)$들로 이루어진 집합의 원소의 개수이다.

쉽게 접근하기 위하여 $n = 3$, $r = 5$인 경우를 생각해 보자. (p74, 예제 2.3.7) 각각의 해를 다음과 같은 방법으로 하나의 $\{5 \times o, 2 \times +\}$-순열에 대응시킨다. 예를 들어 해 $3+1+1=5$는 $ooo+o+o$에 대응되고, 해 $0+2+3=5$는 $+oo+ooo$로 대응되게 하는 것이다. 이러한 순열의 개수는 $P(7;5,2) = \binom{5+(3-1)}{5}$이다. 우리의 다중집합에는 o가 "바둑알의 개수"만큼 있고, $+$가 "변수의 개수 -1"만큼 있다. 그러므로 일반적인 경우에 해의 수는

$$P(r+(n-1); r, n-1) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{r+(n-1)}{n-1} = {}_nH_r$$

이다. ($\binom{n+r-1}{n-1}$은 r이 변하여도 "choose의 아랫수"가 일정하다는 장점이 있다.)

${}_nH_r$은 무한다중집합 $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty \times a_1, \ldots, \infty \times a_n\}$의 r-조합의 개수로 정의되었다.(p75) A의 r-조합은 $\{\overbrace{a_1, \ldots, a_1}^{x_1\text{개}}, \ldots, \overbrace{a_n, \ldots, a_n}^{x_n\text{개}}\}$, $(x_1 + \cdots + x_n = r)$ 형태이므로 이러한 것들의 개수는 디오판투스 방정식 (2.11)의 해의 개수와 일치한다. ⊣

위의 논의에서 "1대1 대응"의 개념을 여러 번 사용한 것에 주목하자. 우리는 무한다중집합의 r-조합을 디오판투스 방정식의 해와 대응시키고, 다시 이를 다중집합의 순열에 대응시켰다. 좀 더 엄격하게 말하자면 $\mathcal{A} =$ "무한다중집합의 r-조합들의 집합"에서 $\mathcal{B} =$ "디오판투스 방정식의 해들의 집합"으로 가는 전단사함수를 구성하였고, 다시 $\mathcal{B}$에서 $\mathcal{C} =$ "다중집합의 순열들의 집합"로 가는 전단사함수를 구성하였다.

경우의 수를 센다는 것은 결국 어떤 집합의 원소의 개수를 알아내는 것이며, 집합 $\mathcal{A}$의 원소의 개수는 그것과 1대1 대응되는 다른 집합 $\mathcal{B}$의 원소의 개수와 같으므로, $\mathcal{A}$의 원소를 세는 것보다 $\mathcal{B}$의 원소의 개수를 세는 것이 쉽다면, 이러한 $\mathcal{B}$를 찾는 것이 우리가 할 일이 된다. 앞서 말했듯이 $\mathcal{A}$의 원소는 통상 순열, 조합(부분집합), 유한열, 문자열(string) 등이다.

<u>예제</u> 2.18 (p79, #2.3.13) 11권의 책이 책꽂이에 나란히 일렬로 꽂혀 있다. 이 중 4권을 뽑되 뽑힌 책들은 서로 인접하지 않도록(않았었도록) 하는 방법의 개수를 구하여라.

(풀이). 교재와 다른 각도에서 접근하겠다. 11권의 책들을 집합 $\{1, 2, \ldots, 11\}$로 나타내고 뽑힌 4권의 책들을 $\{1, 3, 8, 10\}$, $\{4, 7, 9, 11\}$등의 부분집합으로 나타내기로 한다. 그렇다면 구하는 답은 아래의 집합의 원소의 개수이다.

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 1 \leq x_1,\ x_4 \leq 11,\ x_1 + 1 < x_2,\ x_2 + 1 < x_3,\ x_3 + 1 < x_4\} \tag{2.12}$$

$y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 - 3$으로 두면 집합 (2.12)는 전단사 함수

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

에 의하여 집합

$$\{(y_1, y_2, y_3, y_4) \mid 1 \leq y_1 < y_2 < y_3 < y_4 \leq 8\} \tag{2.13}$$

과 1대1 대응됨을 알 수 있다. 그리고 집합 (2.13)은 다시 아래의 집합과 1대1 대응된다.

$$\{\{y_1, y_2, y_3, y_4\} \mid 1 \leq y_1, y_2, y_3, y_4 \leq 8,\ \} \tag{2.14}$$

그리고 (2.14)의 원소의 개수는 다름 아닌 $\binom{8}{4} = 70$이다. ⊣

<u>연습문제</u> 2.19 중복조합들의 개수 공식 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$을, 아래의 집합 $\mathcal{A}$와 1대1 대응되는 집합 $\mathcal{B}$를 찾아 원소의 개수를 셈으로써 얻어보라. (단조증가 r-수열)

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_r) \mid 1 \leq x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_r \leq n\}$$ ⊣

<u>연습문제</u> 2.20 다음의 조건을 만족하는 함수 f들의 개수를 구하여라.

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, \ldots, 19\}$$
$$f(n+1) \geq f(n) + n, \quad \text{for } n \in \{1, 2, 3, 4\}$$ ⊣

<u>예제</u> 2.21 (p65: #13.(1)) 자연수 m, n, k에 대한 다음의 등식을 조합론적 방법으로 증명하라.

$$\binom{m+n}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn$$

(풀이). 좌변은 $m+n$개의 원소를 가진 집합에서 2개의 원소를 뽑는 방법의 개수이다. 즉, m개의 원소를 가진 집합 A와 n개의 원소를 가진 집합 B가 서로소일 때, $A \cup B$에서 2개의 원소를 뽑는 것인데 이것은 다음 3 가지의 경우로 <u>분할된다</u>.(즉, <u>중복과 누락없이 나누어진다</u>.) ① A에서만 2개의 원소를 뽑는 경우, ② B에서만 2개의 원소를 뽑는 경우, ③ A에서 1 개, B에서 1개의 원소를 뽑는 경우. 이 각각의 경우에 뽑는 방법의 수를 합한 것이 우변이다. 그러므로 좌변 = 우변이다. ⊣

<u>예제</u> 2.22 (p65: #14.(1), Vandermonde의 항등식) 자연수 m, n, k에 대한 다음의 등식을 조합론적 방법으로 증명하라.

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i}$$

(풀이). 이것은 바로 위의 문제에서 2를 k로 일반화한 것이다. 이때는 k개의 원소를 뽑는 것은 $k+1$ 가지의 경우로 분할된다. 즉, $i = 0, \ldots, k$에 대해서 A에서 i개, B에서 $k-i$개를 뽑는 것이다. 위 식의 우변은 분할의 각 경우에 대한 방법의 개수들을 합한 것이므로 좌변과 같다. 여기서 $i > m$ 또는 $k-i > n$인 경우에는 $\binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i} = 0$임에 유의하라. (더 엄격하게 하려면 A에서 뽑은 원소는 B에서 뽑은 원소들과 관계가 없으므로(각 집합에서 뽑아야 할 원소의 개수가 일단 정해지면, 그 다음 각 집합에서 어떤 원소를 뽑는가는 독립적이다) 방법의 수를 곱한다는 말까지 해야 할 것이다.) ⊣

<u>예제</u> 2.23 (p65: #13.(2), Newton의 항등식) 자연수 n, m, k에 대한 다음의 등식을 조합론적 방법으로 증명하라.

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$$

(풀이). 좌변의 조합론적 의미는 왕의 친위병 n명 중에서 m명의 경호대원을 뽑고, m명의 경호대원 중에서 다시 k명의 최측근 경호대원을 뽑는 방법으로 생각하면 된다. 우변은 n명 중에서 최측근 경호대원 k명을 먼저 뽑은 다음에 $n-k$명의 남은 친위병 중에서 일반 경호대원 $m-k$명을 뽑는 방법의 개수이다. 이 둘은 서로 같다. ⊣

<u>연습문제</u> 2.24 (p65: #14.(2)) 다음의 항등식은 틀렸음을 보여라.

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{i}$$ ⊣

<u>연습문제</u> 2.25 (p84: #1) 20 이하의 자연수 4개로 이루어진 집합 A에서 자연수 k가 (1) A의 최소원일 확률, (2) A에서 두 번째로 작은 원소일 확률을 각각 구하여라.

(힌트). 모든 경우의 수(4-부분집합의 개수)는 $\binom{20}{4}$이고, k를 최소원으로 가지는 4-부분집합의 개수는 $\binom{20-k}{3}$이다. ⊣

<u>연습문제</u> 2.26 (p84: #2) 다음의 각 경우에 a, b, c, d, e를 써서 만들 수 있는 길이 3의 문자열의 개수를 구하여라.

(1) 중복 선택 허용

(2) 중복 선택 불허. e가 포함되어야 함. ((힌트). e의 위치)

(3) 중복 선택 허용. e가 포함되어야 함. ((힌트). e의 개수) ⊣

<u>연습문제</u> 2.27 (p85: #16) 연립방정식

$$x_1 + x_3 = 6, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$$

의 음아닌 정수해의 개수를 구하여라.

(힌트). $(x_1, x_3) = (0, 6), (1, 5), \ldots, (6, 0)$에 대하여 각각 해의 개수를 구한다. ⊣

<u>연습문제</u> 2.28 (p84: #3) 중학생 2명, 고등학생 4명에게 10자루의 연필을 나누어 주려 한다. 중학생에게는 각각 2자루 이하를 주는 방법의 개수를 구하여라.

(힌트). 모든 학생에 대한 디오판투스 방정식과 각 중학생에 대한 디오판투스 부등식을 생각한다. 두 중학생에게 주는 연필의 개수 $r = 0, 1, 2, 3, 4$에 대하여 고등학생에게 연필을 주는 방법의 개수는 ${}_4H_{10-r}$이다. $r = 3, 4$일 때는 중학생에게 연필을 주는 방법의 개수가 각각 2, 1임에 유의할 것. (책의 해답은 틀림.) ⊣

<u>연습문제</u> 2.29 (p85; #9) 1,2,...,8 중 5개를 (중복을 불허하여) 써서 만들 수 있는 5자리의 정수를 작은 수부터 차례로 쓸 때 25431은 몇 번째 수인가?

(힌트). 1로 시작하는 모든 수는 25431 앞에 나온다. 21, 22, 23, 24로 시작하는 모든 수는 25431 앞에 나온다. 이런 식으로 계속한다. (책의 해답은 틀림.) ⊣

<u>예제</u> 2.30 '01'이 꼭 m번 나타나는 길이 n의 $\{0,1\}$-수열의 개수를 구하라. (p84: #8, 책의 해답은 틀림. $(n, m) = (3, 0)$, $(n, m) = (3, 1)$인 경우를 생각해 보라.)

(풀이). 01-수열의 개수를 세는 대신 $(x_1, \ldots, x_k)$의 개수를 센다.

$m=3$ 경우 $\quad 2 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n$

$\boxed{01}$ 0..01..10..01..10..01.....1 $k=5=2m-1$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$

$\boxed{00}$ 0..01..10..01..10..01..10..0 $k=6=2m$

$\boxed{10}$ 1..10..01..10..01..10..01..10..0 $k=7=2m+1$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7$

$\boxed{11}$ 1..10..01..10..01..10..01.....1 $k=6=2m$

$$\binom{n-1}{2m-1}+\binom{n-1}{2m} + \binom{n-1}{2m+1}+\binom{n-1}{2m}$$

$$= \binom{n}{2m} + \binom{n}{2m+1} = \binom{n+1}{2m+1}$$

예제 2.31 디오판투스 부등식

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \tag{2.15}$$

의 음아닌 정수해의 개수를 구하여라.

(풀이). 구하는 답은 $x_1+x_2+x_3 = k$의 정수해의 개수를 $k = 0, 1, \ldots, 12$에 대해서 각각 구하여 모두 더하면 된다. 따라서 $\sum_{k=0}^{12} {}_3H_k$가 답이 된다. 그런데 이것보다 더 간단명료한 풀이가 있다.

$y = 12 - (x_1 + x_2 + x_3)$로 두면

$$y + x_1 + x_2 + x_3 = 12 \tag{2.16}$$

가 된다. 그리고 (2.15)의 음아닌 정수해들은 (2.16)의 음아닌 정수해들과 1-1대응이 된다. 따라서 구하는 답은 간단히 ${}_4H_{12}$가 된다.

방금 우리는 다음의 항등식을 증명하였다.

$$\sum_{k=0}^{m} {}_nH_k = {}_{n+1}H_m$$

⊣

연습문제 2.32 답을 식으로 나타낼 경우, 그 식은 P, C, H, $\sum$ 등을 사용할 수 있다.

(1) p85: #10 n자리 자연수를 $x_1x_2\ldots x_n$로 나타내었을 때 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$을 만족하는 것들 중에서 10만 이하의 자연수는 몇 개 있는가? (힌트). 가장 작은 수(에 대응되는 문자열)는 00001, 가장 큰 수는 99999. 연습문제 2.19 참조.

(2) p85: #14 방정식 $x_1 + \cdots + x_5 = 25$의 정수해 중에서 아래의 각 조건을 만족하는 것들의 개수를 구하여라.

(a) 각 x_i가 양의 홀수. (힌트). $y_i = (x_i - 1)/2$

(b) $x_i \geq i$. (힌트). 바로 아래 문제 (p85: #15)

(3) p85: #15 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$, $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq -5$, $x_4 \geq 8$의 정수해의 개수를 구하여라. (힌트). $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 + 5$, $y_4 = x_4 - 8$로 둔다.

(4) p86: #17 연립부등식 $x_1 + \cdots + x_6 \leq 20$, $\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$의 음 아닌 정수해의 개수를 구하여라.
(힌트). (책의 해답에는 오타가 있음. 첨수 k의 의미를 생각해 보라.) $x_1 + x_2 + x_3 = k$로 두고 각 $k = 0, \ldots, 7$에 대하여 부등식 $x_4 + x_5 + x_6 \leq 20 - k$를 생각한다. 이 부등식의 음아닌 정수해의 개수는 $y + x_4 + x_5 + x_6 = 20 - k$의 음아닌 정수해의 개수와 같다.

(5) p86: #20 정수 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$과 r에 대하여 $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$으로 두었을 때, 디오판투스 방정식

$$x_1 + \cdots x_n = r, \quad x_i \geq \lambda_i \, (i = 1, \ldots, n)$$

의 정수해의 개수는 ${}_{n+r-\lambda-1}C_{r-\lambda}$임을 보여라.
(힌트). 쉬운 문제이다. 오타 수정: "$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$이라고 할 때, .."

(6) p86, #21 (힌트: 이 문제는 p79의 예제 2.3.13과 본질적으로 같다. 책의 해답에는 오타가 있음.)

(7) p86: #22 (힌트: 연속한 m개의 정수의 곱은 $m!$의 배수라는 사실을 이용한다. 이 사실 및 이 사실의 증명은 암기할 가치가 있다.)

$$\overbrace{k(k+1)\cdots(k+m-1)}^{m \text{ factors}} = \overbrace{(k+m-1)\cdots k}^{m \text{ factors}} = {}_{k+m-1}P_m = {}_{k+m-1}C_m \cdot m!$$

(8) p86: #23 좌표평면에서 원점을 출발하여 한 걸음에 상하좌우로 1단위씩 움직이는 동점이 $2n$ 걸음 후에 다시 원점으로 돌아오는 방법의 개수를 구하여라. (힌트: 하나의 "방법"은 r,l,u,d로 이루어진 길이 $2n$의 문자열에 대응된다. 이 수열에서 r의 개수 p는 l의 개수와 같고 u의 개수와 d의 개수는 둘 다 $n - p$가 되어야 한다. $p = 0, 1, \ldots, n$일 때의 답을 구하여 모두 더한다.) ⊣

2.3 2항계수와 파스칼의 행렬

<u>정의</u> 2.33 파스칼의 행렬은 오른편 그림과 같이 $\binom{n}{k}$들의 값을 배열하여 행렬로 만든 것이다. n은 맨 위쪽 행의 0에서 시작하여 아래쪽 행으로 가면서 증가하며, k는 맨 왼쪽 열의 0에서 시작하여 오른쪽으로 가면서 증가한다. $n < k$인 경우에는 행렬의 원소는 0이므로, 원소가 양수인 부분만 보면 삼각형이 되는데 이 삼각형을 파스칼의 삼각형이라고 한다. (p88)

맨 왼쪽 열과 대각선에 놓인 셀들의 값은 모두 1임에 주목하라. 그리고 공식 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$는 이 그림에서 <u>ㄱ-법칙</u>으로 암기하면 편하다. ⊣

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	⋯	k
0	1	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	⋯	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	⋯	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	⋯	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	⋯	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	⋯	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	⋯	0
7	1	7	21	35	35	20	7	1	⋯	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
n	1	*	*	*	*	*	*	*		1

$\binom{n}{k}$는 2항정리

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \tag{2.17}$$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{2.18}$$

에서 우변의 다항식의 항들의 계수로 나타나므로 2항계수(*binomial coefficient*)라고 하기도 한다. 2항계수를 포함하는 공식들 중에 중요한 것들을 알아보자.

<u>예제</u> 2.34 아래의 문제들에서 n에 대한 별도의 언급이 없다면 $n \geq 0$이다.

(1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (p91: 예제2.4.4) : (2.18)의 x에 1을 대입.

(2) $\sum_{k \text{ odd}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ even}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$, 단 $n \geq 1$. (p92, 예제2.4.5.(1)) : (2.18)의 x에 -1을 대입하면 간단히 증명된다. ($n = 0$일 때는 0^0을 얻게 됨에 주목할 것.) 또 하나의 증명방법이 있는데 이것은 $X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 짝수인 것을 '짝부분집합', 원소의 개수가 홀수인 것을 '홀부분집합'이라고 하고, 짝부분집합들의 개수를 $f(n)$, 홀부분집합들의 개수를 $g(n)$이라고 둔 다음, $f(n) = g(n) = 2^{n-1}$임을 n에 대한 수학적 귀납법으로 보이는 것이다. 나머지 부분은 (오타가 많지만) 교재에 나와 있으며 여기서는 생략한다.

(3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (p92, 예제2.4.5.(2)) : 이것은 Vandermonde 항등식에서 $m = n$인 경우이다. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ 임을 이용한다.

(4) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ (p94, 예제2.4.6.(1)) : (2.18)의 양변을 x에 대하여 미분하고 $x = 1$을 대입한다.

(5) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$ (p94, 예제2.4.6.(2)) : (2.18)의 양변을 x에 대하여 미분한 식의 양변에 x를 곱한 다음 한 번 더 미분한다. 그리고 $x = 1$을 대입한다.

(6) $0 < p < 1$, $q = 1 - p$일 때 $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{(n-k)} = np$: $(px + (1-p))^n$에 대한 2항정리를 사용하고 x에 대해 미분한 다음 $x = 1$로 둔다.

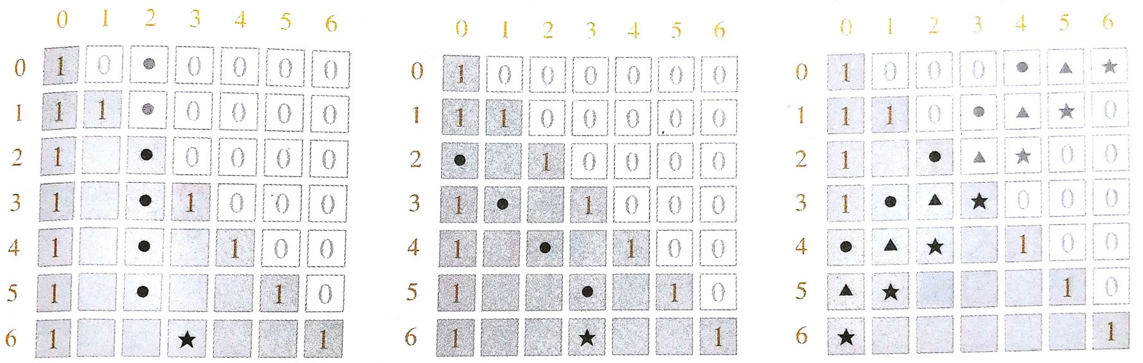
(7) $0 < p < 1$, $q = 1-p$일 때 $\sum_{k=0}^{n} (k-np)^2 \binom{n}{k} p^k q^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{(n-k)} - (np)^2 = npq$: 위의 (6)에서 사용했던 2항정리 식의 양변에 x를 곱하고 한 번 더 미분한다. ⊣

<u>예제</u> 2.35 (<u>2항계수의 합 공식</u>) p94, 예제 2.4.7 (책의 (2), (3)에는 오타 있음.)

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$

(3) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = g_n$이라 하면 $(g_n)_n$은 피보나치 수열이다.



위의 3 공식들은 모두 파스칼의 삼각형을 그리고 ㄱ-법칙을 적용하여 증명할 수 있다. i에 대한 귀납법을 사용한다. ⊣

<u>예제</u> 2.36 집합 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 모든 r-부분집합들을 생각하자. 각각의 r-부분집합에서 선택한 가장 작은 원소들의 가중산술평균(weighted arithmetic mean)은 $\frac{n+1}{r+1}$임을 증명하라. (p65, #10)

(풀이). 가장 작은 원소가 1일 때, 2일 때, ..., $n-r+1$일 때 각각에 해당하는 r-부분집합의 개수는 $\binom{n-1}{r-1}$, $\binom{n-2}{r-1}$, ..., $\binom{r-1}{r-1}$개일 것이므로 원하는 평균값은

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k \cdot \binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}} \tag{2.19}$$

이 된다. 위 식의 분자를 계산하기는 쉽지 않은데, (p107, #16)에서 힌트를 얻을 수 있다.

> $n \geq k \geq 0$인 임의의 두 정수 n, k에 대하여
>
> $$\binom{n}{k} + 2\binom{n-1}{k} + 3\binom{n-2}{k} + \cdots + (n-k+1)\binom{k}{k} = \binom{n+2}{k+2} \tag{2.20}$$
>
> 이 성립한다. (교재에 나온 식에는 오타가 2곳 있다. 교재의 식은 $k=1$, $n=2$일 때 성립하지 않음이 쉽게 확인된다.)

(2.20)을 증명해 보자. <u>파스칼의 삼각형</u>과 <u>ㄱ-법칙</u>을 이용하기 위하여 위 식의 좌변을 다음과 같이 배열한다.

$$\begin{array}{llll}
\binom{k}{k} & \cdots & & \binom{k}{k} \\
\binom{k+1}{k} & \cdots & \binom{k+1}{k} & \\
\vdots & & & \\
\binom{n-1}{k} & \binom{n-1}{k} & & \\
\binom{n}{k} & & &
\end{array}$$

위 삼각형의 맨 왼쪽 열의 합은 $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$이다. (예제 2.35.(1) 참조) 왼쪽에서 두 번째 열의 합은 $\binom{n}{k+1}$이다. 그리고 맨 오른쪽 열의 합은 $\binom{k+1}{k+1}$이다. 일반적으로 i번째 열의 합은 $\binom{n-i+2}{k+1}$이고 $i = 1, \ldots, n-k+1$이므로 결국 삼각형 전체의 합은

$$\sum_{i=1}^{n-k+1}\binom{n-i+2}{k+1} = \sum_{j=k+1}^{n+1}\binom{j}{k+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{j}{k+1} = \binom{n+2}{k+2}$$

가 된다. 이것으로 (2.20)의 증명이 완료되었다. (2.20)을 다시 쓰면

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i \cdot \binom{n-i+1}{k} = \binom{n+2}{k+2} \tag{2.21}$$

이다.

(2.19)의 분자는 $\sum_{k=1}^{n-r+1} k \cdot \binom{n-k}{r-1} = \sum_{i=1}^{n-r+1} i \cdot \binom{n-i}{r-1}$ 인데 이것은 (2.21)에서 n을 $n-1$로, k를 $r-1$ 로 바꾼 것이므로 (2.21)의 우변은 $\binom{n+1}{r+1}$ = "(2.19)의 분자"가 된다. 그러면 이제 (2.19)는

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!/((n-r)!(r+1)!)}{n!/((n-r)!r!)} = \frac{(n+1)!r!}{n!(r+1)!} = \frac{n+1}{r+1}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ⊣

예제 2.37 $\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{3}\binom{i}{j}$의 값을 구해 보자. (p97: 예제 2.4.8)

우선 이것은 $\sum$의 순서를 뒤바꾸어 얻은 $\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{5}\binom{i}{j}$과 값이 같다는 것을 알아야 한다. (일반적으로 2개의 $\sum$이 있을 때 첨수변수의 구간이 상수들만으로 이루어져 있으면 $\sum$의 순서를 바꾸어도 값이 변하지 않는다.) 이제 예제 2.35.(1)을 이용하면 답이 쉽게 구해진다. ⊣

단평 2.38 아래의 토픽은 다음 학기에 생성함수 단원에서 다루게 될 것이며 일단은 생략한다.

(1) p97: 2항계수의 확장, 예제 2.4.9.

(2) p99: 정리 2.4.11 (뉴튼의 2항정리, 오타 있음.)

(3) p101: 예제 2.4.12

연습문제 2.39

(1) (p104: #2) $S \overset{\text{def}}{=} \{\binom{s}{t} \mid s+t \le 12,\ s,t \in \mathbb{Z}\}$로 두었을 때 S의 모든 원소들의 합을 구하여라. (힌트). 2항계수의 합 공식 (1)에 의하여 $\sum_{k=1}^{7}\binom{14-k}{k}$을 구하면 된다. 이것의 값은 `wolframalpha.com`에서 계산하면 된다. 또는 2항계수의 합 공식 (3)을 사용해도 된다.

(2) (p104: #3.(6)) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{k+i} = \binom{m+n}{n-k}$를 증명하라. (힌트). Vandermonde의 항등식에서 $\sum$의 위끝은 m을 사용해도 되고, 아래끝은 $k-n$을 사용해도 된다.

(3) (p105: #9) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}9^{n-k} \overset{\text{def}}{=} S$가 11의 배수가 되기 위한 자연수 n에 대한 조건은? (힌트). $(1+9)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}1^k 9^{n+1-k} = 9S+1$

(4) (p106: #11.(2)) $\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$의 값은? (힌트). 식 (2.18)의 양변을 부정적분하고 $x=-1$을 대입한다. 단, 적분상수를 잊지 말아야 한다. 또는 $(1-x)^n$을 2항정리를 써서 전개하고 양변을 0부터 1까지 정적분한다.

(5) (p106: #12.(2)) 다음의 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{k}{n-m} = \binom{n}{m}\binom{m+n}{m}$$

(힌트). Vandermonde 항등식을 이용하여 우변을 $\sum$ 기호를 써서 나타낸다. 이때 $\binom{m+n}{m}$을 $\binom{m+n}{n}$로 바꿔 $\sum$의 위끝을 좌변과 동일한 n으로 맞추어 준다. 뉴튼의 항등식을 좌변

에 적용한 다음 $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{n-k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{n-k}$를 보인다. (일반적으로 $\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{\substack{k+\ell=n\\k,\ell\geq 0}}a_kb_\ell$ 임.) ⊣

<u>연습문제</u> 2.40 (P105: #6) $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$이 다음과 같을 때 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x_k$를 계산하여라. (문제에 오타가 좀 있고 책의 해답에도 오류가 많이 있음.) (힌트). $n=0$인 경우에 별도로 생각해 주어야 하는 경우가 많다. 그 이유는 우리가 알고 있는 공식들 중에 $n>0$인 경우에만 성립하는 것이 있기 때문이다.

(1) $(1,0,1,0,\ldots,\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})$ (힌트). <u>예제</u> 2.34.(2)

(2) $(1,2,1,2,\ldots,\frac{3+(-1)^{n+1}}{2})$ (힌트). <u>예제</u> 2.34.(2)

(3) $(1,2,3,\ldots,n+1)$ (힌트). <u>예제</u> 2.34.(4)와 비슷하지만 ① 계수에 $(-1)^n$이 붙어 있고, ② 각 계수가 1씩 더 크다는 차이가 있다. ①은 $x=-1$을 넣어 주면 해결되고, ②는 양변을 미분하기 전에 x를 곱해줌으로써 해결된다. (다른 해법도 있다. 생각해 보라.) $n=0$, $n\geq 1$, $n\geq 2$인 3가지 경우로 나누어 답해야 할 것이다.

(4) $(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,(-1)^n\frac{1}{n+1})$ (힌트). 아래의 (6)과 비슷함.

(5) $(1,3,5,\ldots,2n+1)$ (힌트). $(1,3,5,\ldots,2n+1)=2\cdot(1,2,3,\ldots,n+1)-(1,1,1,\ldots,1)$

(6) $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n+1})$ (힌트). <u>연습문제</u> 2.39.(4)와 동일한 문제임.

(7) $(1,1,2,3,5,\ldots,f_n)$, (단, $f_0,f_1,\ldots$는 피보나치 수열) (힌트). 연습문제 2.45와 비슷하며 계차행렬의 첫 행을 $(1,0,f_0,f_1,\ldots)$로 두면 된다.

(8) $(0,1,4,9,\ldots,n^2)$ (힌트). <u>예제</u> 2.34.(5) ⊣

2.4 계차수열과 계차행렬

<u>정의</u> 2.41 (PP108–109) 수열

$$\vec{a}=(a_0,a_1,a_2,\ldots)$$

이 주어졌을 때, 이것의 계차수열은

$$\Delta\vec{a}=(\Delta a_0,\Delta a_1,\Delta a_2,\ldots),\ \text{where}$$
$$\Delta a_i=a_{i+1}-a_i$$

로 정의된다. 이제 귀납적으로

$$\Delta^1\vec{a}=\Delta\vec{a},$$
$$\Delta^{n+1}\vec{a}=\Delta(\Delta^n\vec{a}),\ (n=1,2,\ldots)$$

로 정의하고 $\Delta^n\vec{a}$, $(n=0,1,\ldots)$들을 행으로 가지는 행렬을 $\vec{a}$의 계차행렬이라 하고 아래의 그림과 같이 나타낸다. 모든 $i\geq 0$, $j\geq 0$에서 $a_{(i+1,j)}+a_{ij}=a_{(i,j+1)}$이 성립함을 알 수 있는데 이를 “왼쪽으로 누운 ㄱ-법칙”이라고 부르기로 한다.

$$
\begin{array}{r|cccccl}
 & 0\text{열} & 1\text{열} & 2\text{열} & 3\text{열} & & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
\mathbf{a} \cdots\to & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots & \leftarrow 0\text{행} \\
\Delta\mathbf{a} \cdots\to & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \leftarrow 1\text{행} \\
\Delta^2\mathbf{a} \cdots\to & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \leftarrow 2\text{행} \\
\Delta^3\mathbf{a} \cdots\to & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \leftarrow 3\text{행} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}
$$

계차행렬의 0열에 나타나는 수열 $\vec{d} \stackrel{\text{def}}{=} (d_0, d_1, d_2, \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} (a_{00}, a_{10}, a_{20}, \ldots)$를 $\vec{a}$ 의 쌍대수열(*dual sequence*)이라 한다. ⊣

정리 *2.42* (P*110: #2.5.1*) 수열 $\vec{a}$의 n항 a_n은 그것의 쌍대수열과 파스칼의 행렬의 제n행과의 내적이다. 즉,

$$a_n = \binom{n}{0} d_0 + \binom{n}{1} d_1 + \binom{n}{2} d_2 + \cdots + \binom{n}{n} d_n \tag{2.22}$$

이 성립한다.

(증명). n에 대한 귀납법을 써서 "모든 수열 $\vec{a}$의 n번째 항 a_n이 2항계수 수열 $\binom{n}{k}_{k=0}^{\infty}$과 쌍대수열의 내적임"을 보인다. (2.22)가 a_{n+1}에 대해서 성립함을 보이기 위하여, $\vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\vec{a}$로 두면 $b_n + a_n = a_{n+1}$이 성립함을 왼쪽으로 누운 ㄱ-법칙에 의하여 알 수 있다. b_n과 a_n을 각각 귀납가설을 써서 표현한 후에 더하면 아래의 그림과 같다. ($\vec{b}$의 쌍대수열은 $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$ 임.)

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
b_n = & & & \binom{n}{0}d_1 & + & \binom{n}{1}d_2 & + & \binom{n}{2}d_3 & + \cdots \\
a_n = & \binom{n}{0}d_0 & + & \binom{n}{1}d_1 & + & \binom{n}{2}d_2 & + & \binom{n}{3}d_3 & + \cdots \\
\hline
b_n + a_n = & \binom{n+1}{0}d_0 & + & \binom{n+1}{1}d_1 & + & \binom{n+1}{2}d_2 & + & \binom{n+1}{3}d_3 & + \cdots
\end{array}
$$

이제 (2.22)가 $a_{n+1} = b_n + a_n$에 대해서 성립함을 위 그림의 마지막 라인에서 볼 수 있는데 이 등식에서 각 d_k의 계수가 $\binom{n+1}{k}$ 임은 각 열마다 ㄱ-법칙을 적용하면 알 수 있다. □

따름정리 *2.43* $\{a_n\}_n$의 쌍대수열이 유한수열 $(d_0, d_1, \ldots, d_k, 0, 0, \ldots)$이고 $d_k \neq 0$라면 일반항 a_n은 n에 대한 k차 다항식이다. ⊣

예제 2.44 (P112, #2.5.2) 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

$$1, -1, -1, 2, 10, 26, 54, 99, 167, 265, \ldots$$

(풀이). 쌍대수열을 구한 다음 정리 2.42를 적용한다. ⊣

예제 2.45 (P112, #2.5.3) 피보나치 수열 $(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (1, 1, 2, 3, \ldots)$에 대한 등식

$$\binom{n}{1} f_0 - \binom{n}{2} f_1 + \binom{n}{3} f_2 - \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} f_{n-1} = f_{n-1}$$

를 증명하여라.

(풀이). $(0, f_0, f_1, \ldots)$의 쌍대수열을 구한 다음 정리 2.42를 적용한다. ⊣

정리 *2.46 (p113: #2.5.4)* 수열 $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots)$의 쌍대수열을 $\vec{d} = (d_n)_{n=0}^{\infty}$라 놓았을 때 각 $n = 0, 1, \ldots$에 대하여

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \binom{n+1}{1} d_0 + \binom{n+1}{2} d_1 + \binom{n+1}{3} d_2 + \cdots + \binom{n+1}{n+1} d_n \tag{2.23}$$

이 성립한다.

(증명). $\vec{a}$의 부분합 $\sum_{k=0}^{n} a_k = s_n$으로 두고

$$\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots) = (0, s_0, s_1, \ldots)$$

로 두면 $\vec{a}$는 $\vec{x}$의 계차수열이다. $\vec{x}$의 쌍대수열은 $(0, d_0, d_1, \ldots)$이므로 정리 2.42에 의하여

$$x_{n+1} = \binom{n+1}{0} \cdot 0 + \binom{n+1}{1} d_0 + \binom{n+1}{2} d_1 + \binom{n+1}{3} d_2 + \cdots + \binom{n+1}{n+1} d_n$$

이다. 그런데 $s_n = x_{n+1}$이므로 우리가 원하는 (2.23)을 얻는다. □

정리 *2.47* 수열 $\vec{a}$의 일반항 a_n이 n에 대한 k-차 다항식이라면 이 수열의 쌍대수열 $\vec{d}$는 길이가 $k+1$이다. 즉, $d_n = 0$, *for* $n = k+1, k+2, \ldots$, $d_k \neq 0$를 만족한다. (*1.* 이것은 따름정리 *2.43*의 역이다. *2. 0*차 다항식은 *0*이 아닌 실수를 뜻한다.)

(증명). p114: #2.5.5는 $\vec{a}$의 $(k+1)$-계차수열, 즉 $\vec{a}$의 계차행렬의 $k+2$번째 행벡터가 $\vec{0}$라고 말하고 있는데 이는 지금 증명할 이 정리와 거의 동일한 내용이다. (다만 교재의 p114: #2.5.5에서는 $\vec{a}$의 k-계차수열이 상수열 $(d_k \neq 0, d_k, d_k, \ldots)$임이 빠져있다.)

k에 대한 귀납법을 사용한다. $k = 0$일 때는 $(\forall n)(a_n = c_0)$이므로 정리의 명제가 성립한다.

$k > 0$일 때 $a_n = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_1 n + c_0$, $(c_k \neq 0)$라 하자. $\vec{b} \overset{\text{def}}{=} \Delta \vec{a}$로 두면 $b_n = c_k\big((n+1)^k - n^k\big) + c_{k-1}\big((n+1)^{k-1} - n^{k-1}\big) + \cdots c_1)$이 된다. b_n의 최고차항은 $c_k k n^{k-1}$이므로 $(k-1)$차 다항식이다. 귀납가설에 의하여 $\vec{b}$의 k-계차수열은 $\vec{0}$이고 $(k-1)$-계차수열은 상수열이다. 그런데 $\vec{a}$의 $(k+1)$-계차수열은 곧 $\vec{b}$의 k-계차수열이고, $\vec{a}$의 k-계차수열은 곧 $\vec{b}$의 $(k-1)$-계차수열이다. □

예제 2.48 (P115: #2.5.6) $\sum_{k=0}^{n} k^4$을 n의 식으로 나타내어라. ⊣

연습문제 2.49 (P120: #1∼#5)

(1) 수열 $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots)$의 쌍대수열이 $(0, 1, 2, 3, 0, 0, \ldots)$일 때, 이 수열의 일반항 a_n을 구하고 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n} a_k$의 값을 구하여라.

(2) 수열 $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots)$의 일반항이 $a_n = n(n+1)(n+2)$이다. a_n의 1의 자리의 수를 b_n이라 할 때 $\sum_{k=0}^{1992} b_k$의 값을 구하여라. (힌트). $\vec{a}$의 첫 12항을 쓰고 패턴을 찾아 보라.

(3) $a_n = \sum_{k=0}^{n} k^5$로 두었을 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^6}$을 구하여라.

(4) 모든 3의 제곱 및 서로 다른 3의 거듭제곱들의 합을 작은 것부터 나열한 수열 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13,... 의 제 100항을 구하여라. (힌트). 이 수열의 각 항을 3진법으로 써서 나열하면 1,2,3,.. 이 2진법으로 나타난다.

(5) 조건 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ for $n \geq 3$을 만족하는 수열 $a_1, a_2, \ldots$에 대하여 $\sum_{k=1}^{1492} a_k = 1985$, $\sum_{k=1}^{1985} a_k = 1492$라면 $\sum_{k=1}^{2001} a_k$의 값은? (힌트). $\vec{a}$는 a_1과 a_2에 의하여 결정된다. 각 항을 나열하면서 패턴을 찾아 보라. ⊣

3 배열과 분배

3.1 비둘기집의 원리

<u>정의</u> 3.1 $n+1$ 마리의 비둘기를 n 개의 비둘기집에 넣으면 2마리 이상 들어간 집이 하나 이상 존재한다. 이 사실을 비둘기집의 원리(*Pigeonhole principle*)라 한다. $\dashv$

<u>연습문제</u> 3.2 비둘기집의 원리를 증명하여라. (힌트: 수학적귀납법) $\dashv$

<u>정리</u> *3.3 (p144: 3.1.6, p148: 3.1.10)*

(*1*) (비둘기집의 원리 버전 *2*) 일단의 실수들 중에는 그들의 산술평균 이상의 수가 존재한다.
(*2*) (비둘기집의 원리 버전 *3*) 자연수 $m_1, \ldots, m_n$에 대하여 $m_1 + \cdots + m_n + 1$마리의 비둘기를 n개의 비둘기 집에 넣으면 어떤 i번 째 집에 $m_i + 1$ 마리 이상이 들어 있다.

(증명). (1). 주어진 일단의 실수 $x_1, \ldots, x_n$의 평균을 a라 하면

$$a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

이다. 모든 x_i가 a 미만이라고 가정하면

$$na = x_1 + \cdots + x_n < a + \cdots + a = na$$

라는 모순을 얻는다. ✓

(2). 대우 명제의 가설부를 가정하고 결론부를 부정하면 모순을 얻을 수 있다. $\dashv$

<u>연습문제</u> 3.4

(1) 비둘기집의 원리(정의 3.1)를 수학적 귀납법을 쓰지 않고 증명하여라.

(2) 일단의 실수들 중에는 그들의 산술평균 이하의 수가 존재함을 증명하여라.

(3) 정리 3.3.(2)에서 i번째 집에 $m_i - 1$ 마리 이하의 비둘기가 들어가게 하려면 비둘기의 마리 수를 어떻게 하면 되겠는가? $\dashv$

비둘기집의 원리는 이해하기는 대단히 쉽지만 활용하기는 쉽지 않을 수 있다. 무엇을 비둘기로 보고 무엇을 비둘기집으로 보느냐가 관건이다.

<u>연습문제</u> 3.5 (p151: #13) 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 내부에 있는 점들에 대하여 다음을 증명하여라.

(1) 17개의 점 중에는 거리가 $\frac{1}{4}$ 이하인 두 점이 존재한다. (힌트). p142: 3.1.1

(2) 33개의 점 중 적어도 세 점은 반지름이 $\frac{3}{20}$인 원의 내부에 있다. (힌트: 16개의 작은 정삼각형의 외접원의 반지름은 얼마인가?) $\dashv$

<u>연습문제</u> 3.6 (p151: #14) 한 변의 길이가 1인 정사각형 내부에 있는 9개의 점 중 적어도 세 점은 넓이가 $\frac{1}{8}$ 이하인 삼각형의 꼭짓점이 됨을 증명하여라. 단, 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다고 한다. (힌트: 4개의 비둘기집을 만들어 보자.) $\dashv$

예제 3.7 (P143: 3.1.3) 쪽의 수가 100인 책에는 그 안에 들어 있는 글자의 수의 합계가 100의 배수인 연이은 몇 개의 쪽이 존재한다. (연이은 몇 개의 쪽의 의미는 1개의 쪽도 포함한다.)

(풀이). 제i쪽에 들어 있는 글자의 수를 x_i라 하고 $s_i \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{i} x_i$로 둔다. 두 경우로 나누어 생각한다. (1) 어떤 s_i가 100의 배수인 경우, 1쪽부터 i쪽까지에 들어 있는 모든 글자들의 수가 100의 배수이다. (2) 어떤 s_i도 100의 배수가 아닌 경우, $r_i \overset{\text{def}}{=} s_i\%100$으로 두면 100 마리의 비둘기 r_i의 값은 99개의 비둘기집 $\{1, \ldots, 99\}$에 들어가야 하므로 $r_i = r_j$인 $i < j$가 존재할 것이다. 이때 $i + 1$쪽부터 j쪽 까지에 들어 있는 모든 글자들의 수는 100의 배수이다. □

연습문제 3.8 위의 문제에서 글자의 수의 합계를 100에서 70으로 바꾸었을 때 증명의 어느 부분이 바뀌어야 하겠는가? ⊣

예제 3.9 (P143: 3.1.4) 철수는 연이은 10일 동안 매일 한 권 이상 총 12권의 책을 읽었다. 이때 철수가 총 7권을 읽은 연이은 몇 날들이 있다.

(풀이). 제i일에 읽은 책의 개수를 x_i라 하고 $s_i \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{i} x_k$로 둔다. 그러면

$$1 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{10} = 12,$$
$$8 \le s_1 + 7 < s_2 + 7 < \cdots < s_{10} + 7 = 19$$

가 성립한다. 그러면 20마리의 비둘기 $s_1, \ldots, s_{10}, s_1+7, \ldots, s_{10}+7$가 19개의 비둘기집 $\{1, \ldots, 19\}$에 들어가야 하므로 어느 두 비둘기는 같은 값을 가진다. 그런데 $i \neq j$이면 $s_i \neq s_j$, $s_i + 7 \neq s_j + 7$이므로 결국 $s_i + 7 = s_j$인 $i \neq j$가 존재해야 한다. 이때 $i < j$일 것이고, $i + 1$일부터 j일까지 읽은 책들의 개수는 7이 되어야 한다. □

연습문제 3.10 $2n > m+k$일 때 "연이은 n일 동안 매일 한 권 이상 총 m권의 책을 읽으면 총 k권을 읽은 연이은 몇 날들이 있다."가 성립함을 보여라. 또한 이 문제에서 따옴표 안의 명제가 $2n \le m + k$일 때는 성립하지 않을 수 있음을 보이는 예를 들어 보아라. ⊣

예제 3.11 (P144: 3.1.5) 100 이하의 자연수들로 이루어진 집합 X의 원소의 개수가 10이라면 X는 원소의 합이 같은 두 부분집합을 가진다.

(풀이). X의 부분집합들을 $X_1, \ldots, X_{1024}$라고 하고 각 i에 대하여 X_i의 원소들의 합을 s_i라 하면 $s_i \le 91 + \cdots + 100 = 955$이다. 1024마리의 비둘기 s_i가 0부터 955까지, 956개의 비둘기집에 들어가야 하므로 $s_i = s_j$인 $i \neq j$가 존재한다. □

연습문제 3.12 위의 예에서 "100 이하의 자연수들로"를 "n 이하의 자연수들로"로 바꾸어도 결론이 성립하려면 n은 최대 얼마까지 가능한가? (힌트). $n = 100$일 때 비둘기집의 개수가 956개이였는데 이것이 1024보다 작다는 사실을 사용했었다. n이 하나 증가할 때마다 비둘기집의 개수는 10씩 늘어난다. 따라서 $n = 106$까지는 동일한 증명방법이 통한다. $n = 106$이 최댓값인가? "n이하의 자연수 10개로 이루어진 집합 X 중에는 X의 임의의 두 부분집합에 대해서 각각 원소의 합을 구했을 때 서로 다른 값이 나오는 것이 있다."를 만족하는 n을 하나만 구해보라. 더 쉬운 것으로 "자연수 10개"를 "자연수 2개", 또는 "자연수 3개"로 바꾼 문제에 대해서 연구해 보라. ⊣

예제 3.13 (P148: 3.1.11) 6명의 사람 중에는 서로 아는 3명이 있거나 서로 모르는 3명이 있다.

(풀이). 6명의 사람을 6개의 점으로 나타내고, 서로 아는 두 사람은 황색 선분으로 연결하고 서로 모르는 두 사람은 흑색 선분으로 연결하여 얻어지는 도형은 변의 색이 같은 삼각형이 존재한다는 것을 보이면 된다.

6개의 점 중 아무거나 택하여 A라 하고 A와 다른 꼭짓점을 잇는 선분들 중에 색깔이 같은 3개를(비둘기집 원리에 의하여 존재함) 취하여 이들을 X, Y, Z라 하자. A와 이 3 점들을 잇는 선분의 색깔을 wlog 황색이라 하자. $\triangle XYZ$의 한 변이라도 황색이라면, 예를 들어 $\overline{XY}$가 황색이라면 $\triangle AXY$는 황색 삼각형이 된다. $\triangle XYZ$의 단 한 변도 황색이 아니라면 이 삼각형은 흑색 삼각형이다.

"N명의 사람 중에는 서로 아는 p명이 있거나 서로 모르는 q명이 있다."를 만족하는 N이 존재한다. (램지의 정리) 이러한 최소의 N를 램지 수라고 하며 $R(p, q)$로 나타낸다.

Values / known bounding ranges for Ramsey numbers R(p, q)

p \ q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
3			**6**	9	14	18	23	28	36	40–42
4				**18**	25	36–41	49–61	59–84	73–115	92–149
5					**43–48**	58–87	80–143	101–216	133–316	149–442
6						**102–165**	115–298	134–495	183–780	204–1171
7							**205–540**	217–1031	252–1713	292–2826
8								**282–1870**	329–3583	343–6090
9									**565–6588**	581–12677
10										**798–23556**

<u>연습문제</u> 3.14 (p152: #15) 다음을 증명하여라.

(1) 가로, 세로의 길이가 각각 5, 6인 직사각형의 내부에 있는 8개의 점 중에는 거리가 $\sqrt{10}$ 이하인 두 점이 존재한다. (힌트: 직사각형을 7개의 구역으로 나누어야 한다. 각 구역에서 두 점 간의 거리의 최댓값이 $\sqrt{10}$ 이하가 되도록 한다.)

(2) 좌표평면 상의 5개의 격자점 중에는, 그 점들을 양 끝점으로 하는 선분의 중점도 격자점인 두 점이 존재한다. (힌트: ① 4개의 조각으로 이루어진 격자점들의 "분할"을 생각해야 한다. ② 선분의 중점의 x-좌표가 정수이기 위한 조건은? y-좌표에 대한 조건은?)

(3) 평면 위에 있는 임의의 볼록 오각형에 대하여 $\angle ABC \leq 36^o$인 세 개의 꼭짓점 A, B, C가 존재한다. (힌트: 그림을 그려보라. 별 모양 도형의 꼭짓각들의 합이 180^o임을 이용한다. 또는, 인접한 두 변을 품는 삼각형의 꼭짓각 중에서 찾으려면, 이때는 내각 중에 $540^o/5 = 108^o$ 이상인 것이 존재한다는 것을 이용한다.) ⊣

<u>연습문제</u> 3.15 집합 $X = \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$의 임의의 $(n+2)$-부분집합의 원소 중에는 합이 $2n$인 두 수가 존재함을 증명하여라. 또한 차이가 n인 두 수가 존재함을 증명하여라. 만일 X에서 0을 뺀다면 문제가 어떻게 달라질까? (힌트). p142: 예제 3.1.2 (문패 달린 비둘기집의 원리), p150: #3 ⊣

<u>연습문제</u> 3.16 200 이하의 자연수 중에서 n개를 택하면 그 중 하나는 다른 하나의 약수임이 보장되는 최소의 n을 구하여라. (힌트). p150: #1. $n = 101$이다. 임의의 자연수는 2의 거듭제

곱과 홀수의 곱으로 유일한 방법으로 표현된다는 사실을 이용하여 $a_i = 2^{e_i} b_i$로 놓고 b_i들을 비둘기로 생각한다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.17 (p150: #5) 다음을 증명하여라.

(1) 13개의 정수 중에는 차가 12의 배수가 되는 두 수가 존재한다. (힌트: 12로 나눈 나머지들을 12개의 비둘기집으로 본다.)

(2) 5개의 정수 중에는 합이 3의 배수인 세 수가 존재한다. (힌트: 법 3으로 생각한다.)

(3) 100 이하의 자연수 53개 중에는 ① 차가 12가 되는 두 수는 존재하지만, ② 차가 11이 되는 두 수가 반드시 존재하지는 않는다. (힌트: 연습문제 3.15. 100 이하의 자연수 중에 12로 나눈 나머지가 1인 6개의 숫자 중에는 차이가 12인 두 수가 존재한다. 여기서 엄격한 증명을 위하여 문패 달린 비둘기집의 원리를 사용한다. 나머지가 2, 3, 4일 때도 마찬가지. 나머지가 5 이상 또는 0인 경우에는 5개의 숫자로 충분하다. 여기서는 비둘기집 원리 버전 3을 사용한다. ②에 대한 답은 $1 \sim 11, 23 \sim 33, \ldots$)

(4) $n \geq 2$일 때 $(n+2)$개의 $3n$ 이하의 자연수 중에는 그 차가 n보다 크고 $2n$보다 작은 두 수가 존재한다. (힌트: $n+1$로 나눈 나머지가 k로 동일한 두 수가 존재한다. 이 두 수의 차이가 $n+1$이면 문제가 없다. 차이가 $2n+2$일 때가 문제인데... 가령 k, $2n+k+2$가 뽑혔다면 나머지 n개의 수는 어떤 값을 취할 수 있을까?)

(5) $2n$ 이하인 $(n+1)$개의 서로 다른 자연수 중에는 서로소인 두 수가 존재한다. (힌트: 차이가 1인 두 수는 서로소이다. 이러한 두 수로 이루어진 집합 n개를 각각 비둘기집으로 본다.)

(6) $1, 4, 7, \ldots, 100$에서 임의로 택한 20개의 수 중에는 그 합이 104인 수의 쌍이 적어도 2개 존재한다. (힌트). 비둘기집에 문패를 단다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.18 (p150: #6) n^2+1개의 서로 다른 수로 이루어진 수열은 길이 $n+1$인 증가 또는 감소하는 부분수열을 가짐을 증명하여라. (힌트: $a_1, \ldots, a_{n^2+1}$이 길이 $n+1$인 증가하는 부분수열을 가지지 않는다고 가정한다. 각 $k = 1, \ldots, n^2+1$에 대하여 a_k에서 시작하는 가장 긴 증가하는 부분수열의 길이를 m_k라 하면 $m_k \leq n$이다. 비둘기집의 원리에 의하여 m_k의 값이 같은 k를 $n+1$개 취하여 $k_1, \ldots, k_{n+1}$로 두면 $a_{k_1}, \ldots, a_{k_{n+1}}$은 감소수열이다. 예를 들어 $n=3$인 경우 수열 $(a_i)_{i=1}^{10}$이 (10,7,8,4,9,2,5,6,1,3)으로 주어졌다 하자. 이때 $(m_i)_{i=1}^{10}$을 구하고 k_1, k_2, k_3, k_4와 감소수열 $(a_{k_i})_{i=1}^{4}$을 구하여라.) ⊣

<u>연습문제</u> 3.19 (p151: #8) 임의로 주어진 서로 다른 11개의 정수 중에는 적당한 연산부호로 연결하면 그 결과가 1155의 배수가 되는 몇 개의 정수가 존재함을 증명하여라. (힌트: $1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$이다. 법 11로 생각하면 11개의 정수 중에는 차이가 11의 배수인 두 수가 존재한다. 이러한 2개를 뺀 나머지 9개의 정수 중에 차이가 7의 배수인 두 수를 뺀다. 이런 식으로 ...) ⊣

<u>연습문제</u> 3.20 (p151: #10) 10시간 동안 45km를 걸어간 어떤 사람이 첫 한 시간에는 6km를 걷고 마지막 한 시간에는 3km를 걸었다고 한다. 이 사람은 어떤 연속된 2시간 동안 9km 이상 걸었음을 증명하여라. (힌트: i번째 시간에 걸은 거리를 x_i-km로 둔다. x_i는 정수가 아닐 수도 있다. $(\exists i \leq 4)(x_{2i-1} + x_{2i} \geq 9)$를 귀류법을 사용하여 보인다.) ⊣

<u>연습문제</u> 3.21 (p151: #11) 어떤 운동선수는 매일 한 번 이상, 일주일에 12번 이하의 연습을 12주간(84일) 계속하였다고 한다. 이 선수가 꼭 23회 연습한 연속된 몇 날이 있음을 증명하여라. (힌트). p143: 예제 3.1.4. ⊣

<u>연습문제</u> 3.22 (p151: #12) 원탁에 10명의 손님의 자리가 명찰과 함께 놓여 있다. 10명의 손님이 명찰을 확인하지 않고 아무렇게나 앉았는데, 제자리에 앉은 손님이 1명도 없었다. 이때 명찰이 놓인 원탁을 적당히 회전시키면 적어도 2명의 손님이 제자리에 앉게 됨을 보여라. (힌트). p145: 예제 3.1.7과 비슷하나 조금 쉽다. 명찰을 1,2,...,10으로 번호를 붙이고 특정한 손님 A 앞에 명찰 i가 놓이도록 했을 때 제 자리에 앉게 되는 손님의 수를 n_i라 했을 때 $n_i \geq 2$인 i가 존재함을 보이는 문제이다. $n_1 = 0$, $n_2 + n_{10} = 10$. 한 바퀴 돌리는 동안 각 명찰은 정확히 한 번 매치를 경험한다. ⊣

3.2 포함배제의 원리

이 절에서 사용하는 모든 집합은 유한집합이다.

집합 X의 원소의 개수를 $|X|$로 나타내기로 한다. 우리는 다음의 사실을 잘 알고 있다.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

포함배제의 원리(*Inclusion-exclusion principle*)는 위의 사실을 아래와 같이 일반화 한 것이다.
$I = \{1, 2, \ldots, n\}$이라 하고 각 $i \in I$에 대하여 집합 A_i가 존재할 때

$$\begin{aligned} \left|\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i\right| &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\beta_k, \quad \text{where} \\ \beta_k &= \textstyle\sum_{J\subseteq I, |J|=k} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

즉,

$$\beta_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|,$$
$$\beta_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|,$$
$$\beta_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|,$$
$$\cdots$$

이다. 일반적으로 β_k는 $\binom{n}{k}$개의 항의 합임을 알 수 있다. 그리고 거의 모든 문제에서 이 항들의 값은 동일하다.

<u>예제</u> 3.23 (p160, 3.2.6) n-집합에서 r-집합으로 가는 전사함수의 개수를 $T(n, r)$이라 했을 때

$$T(n, r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r - k)^n \tag{3.2}$$

이다.

(풀이). $\{1, \ldots, n\}$에서 $\{1, \ldots, r\}$로 가는 함수의 개수는, f에 아무런 조건이 없다면 r^n이다.

f가 전사함수라는 것은 모든 $i = 1, \ldots, r$에 대해서 f가 i를 함수값으로 가진다는 것이므로, 이러한 f들의 집합을 B_i라 하면 $|\bigcap_{i=1}^r B_i|$가 곧 우리가 원하는 $T(n, r)$이 될 것이다. 문제는 $|\bigcap_{i=1}^r B_i|$의 값을 구하기가 쉽지 않다는 것이다. 이 문제를 해결하기 위하여 각 $i = 1, \ldots, r$에 대하여 $A_i \overset{\text{def}}{=} B_i^c$로 두면

$$\left|\bigcap_{i=1}^r B_i\right| = \left|\bigcap_{i=1}^r A_i^c\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right)^c\right| = r^n - \left|\bigcup_{i=1}^r A_i\right|$$

이다. 여기서 $|\bigcup_{i=1}^r A_i|$의 값을 구할 때 포함배제의 원리를 사용하게 된다.

식 (3.1)에서의 β_k는 여기서는

$$\beta_k = |A_1 \cap \cdots \cap A_k| + \cdots + |A_{r-k+1} \cap \cdots \cap A_r|$$

가 되는데 이것은 $\binom{r}{k}$개의 항의 합이고, 각 항의 값은 $(r-k)^n$이므로 결국 $\beta_k = \binom{r}{k}(r-k)^n$이 된다. 따라서

$$T(n, r) = r^n - \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} (r-k)^n = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n$$

를 얻는다. □

<u>정의</u> 3.24 (교란수) $\{1, \ldots, n\}$의 순열 σ 중에 $(\forall i)\big(\sigma(i) \neq i\big)$를 만족하는 것들의 개수를 n-번째 교란수(*derangement number*)라고 하고 D_n으로 나타낸다. ⊣

<u>정리</u> *3.25 (*P*162, 3.2.7)*

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \tag{3.3}$$

(증명). $\{1, \ldots, n\}$의 순열 σ 중에 $\sigma(i) = i$를 만족하는 것들의 집합을 A_i라 하고 $n! - |\bigcup_{i=1}^n A_i|$를 포함배제의 원리를 사용하여 계산하면 된다.

β_k는 $\binom{n}{k}$개의 ("k개의 A_i들의 교집합"의 원소의 개수 $\overset{\text{def}}{=} m$)들의 합, 즉 $\binom{n}{k}m$이다. m은 "$\sigma(i) = i$가 정확히 k개의 i에서 만족되는 $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$의 개수"이므로 $(n-k)!$가 된다.

따라서 각 $k = 1, \ldots, n$에 대하여

$$\beta_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

이 되고,

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

가 된다. □

<u>예제</u> 3.26 (P157: 3.2.2) $1, 2, 3, 4$ 모두가 자리의 숫자로 나타나는 99999 이하의 음이 아닌 정수의 개수를 구하여라.

(풀이). 여집합의 개념을 사용하게 될 것이므로 전체집합이 무엇인지 정확히 알아야 한다. 그것은 0부터 99999까지의 모든 정수이고 개수는 100000이다.

$i = 1, 2, 3, 4$ 모두를 자리의 숫자로 가진다고 했는데, "i를 가지는 숫자들의 집합"들의 교집합의 원소의 개수를 세어야 하므로 "i를 가지지 않는 숫자들의 집합 $\stackrel{\text{def}}{=} A_i$"들의 합집합을 생각하기로 한다. 구하는 답은

$$100000 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

이다. 이제 β_k를 구해야 하는데, A_i들 중에 k개의 교집합은 $\binom{4}{k}$개 있으며, 각 교집합의 원소의 개수는 $(10-k)^5$이다. 예를 들어 2개의 숫자 1, 4를 사용하지 않는 5자리 수는 $(10-2)^5 = 8^5$개 있다. (10만 미만의 음아닌 정수는 모두 5자리 수라고 볼 수 있다. 예를 들어 4자리 수 6203은 5자리 수 06203으로 보는 것이다.) 그러므로

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 \\ &= \binom{4}{1}(10-1)^5 - \binom{4}{2}(10-2)^5 + \binom{4}{3}(10-3)^5 - \binom{4}{4}(10-4)^5 \\ &= 4 \cdot 9^5 - 6 \cdot 8^5 + 4 \cdot 7^5 - 1 \cdot 6^5 = 99040\end{aligned}$$

따라서 구하는 답은 $100000 - 99040 = \boxed{960}$이다. ⊣

Discussion 3.27 음아닌 정수 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$에 대해서

$$x_1 + \cdots + x_n = r, \quad x_i \geq \lambda_i,\ (i = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

꼴의 디오판투스 방정식의 해의 개수는 중복조합을 이용하여 구했다. ($y_i \stackrel{\text{def}}{=} x_i - \lambda_i$로 두는 1대1 대응을 생각해야 한다.) 아래의 방정식은

$$x_1 + \cdots + x_n = r, \quad 0 \leq x_i \leq \lambda_i,\ (i = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

(3.4)와 비슷하나 부등식의 방향이 반대다.

여러 개의 조건(여기서는 부등식)을 동시에 만족하는 것들의 개수를 센다는 것은 각 조건을 만족하는 집합들의 교집합의 원소의 개수를 세는 것인데, 이것은 그 조건의 부정을 만족하는 집합들의 합집합의 원소의 개수를 전체집합의 원소의 개수에서 빼는 것과 같다.

그러므로 (3.5)의 해의 집합을 $\bigcap_{i=1}^r B_i$로 둔다면 이것의 원소의 개수는 (모든 해의 개수)$-$ $|\bigcup_{i=1}^r A_i|$로 구할 수 있다. 단, 여기서 $A_i \stackrel{\text{def}}{=} B_i^c$이며, 이것은 $x_i > \lambda_i$라는 조건 하나만을 만족하는 해들의 집합을 의미한다. ⊣

<u>예제</u> 3.28 (p158: 3.2.3) 자리 숫자의 합이 25인 9999 이하의 자연수의 개수를 구하여라.

(풀이). 구하는 답은

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25, \quad 0 \leq x_i \leq 9,\ (i = 1, 2, 3, 4)$$

의 정수해의 개수와 같다. 우선 전체집합은 위 디오판투스 방정식에서 부등식의 조건을 뺐을 때의 음아닌 정수해들의 집합이므로, 원소의 개수는 ${}_4H_{25} = \binom{28}{25} = 3276$이다. 각 $i = 1, 2, 3, 4$에 대하여

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25, \quad x_i \geq 10$$

의 음아닌 정수해의 집합을 A_i라 하면 구하는 답은

$$3276 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

가 된다. β_k를 $k=1,2,3,4$에 대해서 구해 보면

$$\beta_1 = \binom{4}{1}\cdot {}_4H_{15} = 4\cdot 816 = 3264$$
$$\beta_2 = \binom{4}{2}\cdot {}_4H_{5} = 6\cdot 56 = 336$$
$$\beta_3 = 0$$
$$\beta_4 = 0$$

따라서 구하는 답은 $3276-(3264-336+0-0)=\boxed{348}$이다.

(주의). 전체집합의 원소의 개수가 10^4이 아니라 ${}_4H_{25}$임에 유의할 것. 따라서 0을 제외해야 하는지에 대해서 신경 쓸 필요가 없다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.29 (P166: #1) 다음과 같은 4자리의 자연수의 개수를 구하여라. (숫자로 답할 필요는 없고 식만 쓰면 된다.)

(1) 0을 포함하지 않거나 또는 1을 포함하지 않는다. (힌트). 0을 포함하지 않는 모든 4자리 수들의 집합을 A_1, 1을 포함하지 않는 모든 4자리수들의 집합을 A_2라 했을 때 $|A_1\cup A_2|$를 구하는 문제이다. 4자리수들의 전체집합은 생각할 필요가 없다.

(2) 0과 1중 적어도 한 숫자를 포함한다. (힌트). 드모르강의 법칙을 사용하여 합집합의 원소의 개수를 구하기 위해 전체집합의 원소의 개수에서 교집합의 원소의 개수를 빼면 된다. 이 문제에서는 포함배제의 원리를 사용할 필요가 없다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.30 (P166: #2) 123, 456, 789 중 적어도 하나를 포함하는 $1,2,\ldots,9$의 순열의 개수를 구하여라. (힌트). 123, 456, 789을 포함하는 순열들의 집합을 각각 A_1, A_2, A_3로 놓고 $|A_1\cup A_2\cup A_3|$를 구하는 문제이다. $|A_i|=7!$ 등, 비교적 쉬운 문제이다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.31 (P166: #4) 정 n각형의 꼭짓점들을 연결하여 만들 수 있는 삼각형 가운데 그 다각형의 변을 포함하지 않는 삼각형의 개수를 구하여라. (힌트). 변들을 $e_1,\ldots,e_n$으로 놓고 e_i를 포함하는 삼각형들의 집합을 A_i로 두었을 때 $|(A_1\cup\cdots\cup A_n)^c| = \binom{n}{3} - |A_1\cup\cdots\cup A_n|$를 구하는 문제이다. β_3는 $n=3$일 때는 1이고 그 이외에는 0이다. $k\geq 4$에 대해서는 $\beta_k=0$이다. 책의 해답은 $n=3$일 때 틀린다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.32 (P166: #5) 집합 X에 대해서 $\sigma(X) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathcal{P}(X)|$로 정의한다. $|A|=|B|=100$, $\sigma(A)+\sigma(B)+\sigma(C)=\sigma(A\cup B\cup C)$일 때 $|A\cap B\cap C|$의 최솟값을 구하여라.

(힌트). $2^{|A|}+2^{|B|}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|}$, $2^{101}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|}$. 그런데 일반적으로 $2^x+2^y=2^z$이면 $x=y=z-1$이 성립함. $\therefore |C|=101$, $|A\cup B\cup C|=102$. $|A\cup B\cup C| = (|A|+|B|+|C|)-(|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|)+|A\cap B\cap C| \;\Rightarrow\; 102 = 100+100+101-(|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|)+|A\cap B\cap C|$. $|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|$가 최소일 때 $|A\cap B\cap C|$도 최소가 됨. $98+99+99=296$이 최소인데, 이때 $|A\cap B\cap C|=97$. 실제로 이렇게 되는 집합 A, B, C의 예를 들어야 함. ⊣

<u>연습문제</u> 3.33 (P166: #7) 갑식이는 어느 일주일 동안 매일 8명의 친구 중 2명씩을 저녁식사에 초대한다는 계획을 세웠다. 8명 모두를 적어도 한 번 이상 올 수 있도록 초대하는 방법의 개

수를 구하여라. 답의 계산식을 쓰고, 이 식의 계산을 www.wolframalpha에서 하면 된다. (책의 답은 틀림.)

(힌트). 각 $k = 1, \ldots, 7$에 대하여 친구 k명을 빼고 초대하는 방법의 개수를 구한 다음 전체 방법의 개수 $\binom{8}{2}^7$에서 이들의 합집합의 원소의 개수를 빼면 된다. 특정한 친구 k명을 초대하지 않는 방법의 수는 $\binom{8-k}{2}^7$이다. 그리고 친구 k명을 선택하는 방법의 수는 당연히 $\binom{8}{k}$이다. 이 방법의 정당성을 확인하기 위하여 답을 다른 방법으로 구하여 맞춰 보아야 한다. 초대 기간을 4일로 줄이면 (일반화된 조합을 사용하는) 다른 방법으로 구할 수 있을 것이다. 또는 친구가 4명이고 3일간 초대하는 경우를 생각해 보라. ⊣

<u>연습문제</u> 3.34 (P166: #8) 1학년부터 6학년까지 한 학년에 한 반씩 6개 반과, 한 반에 한 명씩 6명의 교사로 구성된 어느 초등학교가 있다. 다음 해에 학생들이 한 학년씩 진급을 하는데, 각 학년의 학생들이 모두 새로운 담임을 만나도록 교사를 배정하는 방법의 수를 구하여라. (책의 답은 틀림.) ⊣

(힌트). $\sigma(i) \neq i + 1$ for $i = 1, \ldots, 5$. 6학년 담임 선생님은 어떤 학년을 맡게 되든 상관 없음. 이때 "일반화된 교란순열"의 개념이 필요하다. 교란수 D_n은 n개의 (구별되는) 대상과 n개의 (구별되는) 상자가 있는데, 각 대상마다 들어갈 수 없는 특정한 상자가 하나씩 있을 때 이들 대상을 상자에 넣는 방법의 수이다.

대상과 상자가 각각 $n+1$개 있는데 대상 중의 n개는 특정한 상자에 들어갈 수 없고, 대상 중의 하나는 아무 상자나 다 들어갈 수 있다는 조건을 만족하도록 대상들을 상자에 넣는 방법의 수는 얼마일까? 대상을 $\{x_1, x_2, \ldots, n, *\}$라 하고 상자를 $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}$라 하자. 각 $i = 1, \ldots, n$에 대해서 x_i는 y_i에 들어갈 수 없고 $*$는 어떤 상자에 들어가도 된다. 두 가지 경우가 있다.

(i) $*$가 y_{n+1}에 들어가는 경우의 수 : D_n

(ii) $*$가 y_{n+1}에 들어가지 않는 경우의 수 : D_{n+1}

(이 강의노트 40쪽의 #4.2를 참조할 것.) 교란수 D_n을 계산할 때는 아래에 보인 점화식들을 사용하면 편하다.

(1) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, $(n \geq 3)$

(2) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, $(n \geq 2)$ ⊣

<u>연습문제</u> 3.35 (P166: #9) 1에서 9까지의 자연수를 배열하는데, 1이 2의 오른쪽에 또는 2가 3의 오른쪽에 또는 3이 4의 오른쪽에 있도록 배열하는 방법의 수를 구하여라. 단, 여기서 '오른쪽' 이라고 해서 인접할 필요는 없다. (책의 답은 틀림.)

(힌트). 다중집합의 순열의 개수를 셀 때와 같은 방법을 사용한다. 3개의 조건 중 특정한 하나의 조건을 만족하는 배열의 개수 $= \frac{9!}{2!}$. 특정한 두 조건을 만족하는 배열의 수 $= \frac{9!}{3!}$, 세 조건을 모두 만족하는 배열의 개수 $= \frac{9!}{4!}$. ⊣

<u>연습문제</u> 3.36 (P167: #10) (1) ① 어떤 모임에 온 n쌍의 부부가 서로 동시에 악수하는 방법의 수를 구하여라.

② $\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}$는 왜 틀린 답인지 설명하여라. (힌트). ① 첫 사람이 악수할 수 있는 사람은 $2n-1$. 남은 사람들 중에 첫 사람이 악수할 수 있는 사람은 $2n-3$. ② 중복이 있다.

(2) n쌍의 부부가 서로 동시에 악수하되 어느 누구도 자신의 배우자와는 악수하지 않는 방법의 수를 구하여라. (힌트). 포함배제의 원리 사용. i번째 부부가 자신의 배우자와 악수하는 "방법"의 집합을 A_i라 놓는다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.37 (P167: #12) 디오판투스 방정식 $x_1+x_2+x_3+x_4=25$, $x_1>x_4$의 음아닌 정수해의 개수를 구하여라. (힌트). $k=0,1,\ldots,12$에 대해서 $x_1=x_4=k$인 해를 제외한다. 그리고 2로 나눈다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.38 (P167: #17) 0, 1, ..., 9의 순열 중 ① 첫 번째에 위치한 숫자는 1보다 크고, ② 마지막에 위치한 숫자는 8보다 작은 것들의 개수를 구하여라. 숫자로 답할 필요는 없고 식만 쓰면 된다. (힌트). 조건 ①를 만족하는 모든 순열들의 집합을 A_1^c, 조건 ②를 만족하는 모든 순열들의 집합을 A_2^c로 놓고 $A_1^c\cap A_2^c$, 즉 $(A_1\cup A_2)^c$의 원소의 개수를 세는 문제이다. $|A_1\cap A_2|$는 구하기 쉬워도 $|A_1^c\cap A_2^c|$는 구하기 어려운 이유는 무엇인가? ⊣

<u>연습문제</u> 3.39 (P168: #20, 오타 정정) 디오판투스 방정식

$$x_1+x_2+x_3+x_4=35,$$
$$3\le x_1\le 8,\ 4\le x_2\le 9,\ 5\le x_3\le 10,\ 6\le x_4\le 11$$

의 정수해의 개수를 구하여라. ⊣

<u>연습문제</u> 3.40 연립부등식

$$x_1+\cdots+x_6\le 16,\ x_1+x_2+x_3\le 5$$

의 음아닌 정수해의 개수를 구하여라. $\sum$과 $\binom{n}{m}$ 기호를 사용하는 식으로 답하면 된다. ⊣

3.3 분배와 분할

(pp169–193) 음 아닌 정수 n과 k에 대하여, n개의 대상을 k개의 상자에 넣는 방법으로 다음과 같은 8가지 경우를 생각할 수 있다. 이 경우들을 '대상-상자 조합'이라고 부르기로 한다. 맨 오른쪽 열에 보인 '방법의 개수'에 대하여는 이 섹션에서 상세히 설명할 것이다.

대상 구별	상자 구별	빈상자 없음	방법의 개수
1	1	1	$T(n,k)$
1	1	0	k^n
1	0	1	$S(n,k)$
1	0	0	$\sum_{i=0}^{k} S(n,i)$
0	1	1	${}_kH_{n-k}$
0	1	0	${}_kH_n$
0	0	1	$p(n,k)$
0	0	0	$\sum_{i=0}^{k} p(n,i)$

경우의 수를 구하는 문제에서 대상을 구별하는지 그렇지 않은지가 명시되어 있지 않은 경우가 많다. 명시되어 있지 않은 경우에는 사람, 카드, 편지 등은 구별되는 것이고 바둑돌, 구슬 등은 (색깔이 같다면) 구별되지 않는 것으로 보는 것이 보통이다.

상자는 방, 우체통 등 대부분의 경우 구분이 되는 것으로 보며, 예외로 구분되지 않는 것으로 보는 상자는 '그룹'이다.

———— ∘ ———— ∘ ————

8 가지의 대상-상자 조합 중에서 먼저 111과 110에 대해서 생각해 보자. 대상을 상자에 넣는 방법의 개수를 알고자 할 때, 대상과 상자는 그것들의 내용은 상관없이 각각의 개수만 알면 되므로 대상들을 $\{1,\ldots,n\}$, 상자들을 $\{1,\ldots,k\}$로 둔다. 대상을 상자에 넣는 것을 함수

$$f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,k\}$$

로 보고 논의하기로 한다. 즉, 대상 x를 상자 y에 넣는 것을 $f(x)=y$로 생각한다. 그렇다면 '방법'은 곧 함수이므로 이러한 함수의 개수가 몇 개인지를 알아내는 것이 우리가 할 일이다.

대상과 상자의 차이는, 하나의 대상은 단 하나의 상자에 들어가야 하지만, 하나의 상자는 여러 개의 대상을 받아들일 수 있다는 것이다. 이것이 바로 함수의 개념과 일치한다. 함수의 값 $f(x)$는 x가 정해지면 이것에 따라서 유일하게 정해지지만, 함수의 값이 y라 하면 (즉, 공역의 원소를 하나 취하여 그것을 y로 나타낸다면) $f(x)=y$가 되는 x들의 집합을

$$f^{-1}(y)\subseteq\{1,\ldots,n\}$$

로 나타내기로 할 때, $f^{-1}(y)$는 2^n개의 부분집합 중 어떤 것도 될 수 있다는 것이다.

빈 상자를 허용하지 않는다는 것은 모든 y에 대해서 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$라는 뜻이며, 이는 곧 f가 전사함수라는 것을 의미한다—이것은 대상-상자 조합 111에 해당한다. 빈 상자를 허용하는 것, 즉 대상-상자 조합 110은 $f^{-1}(y)$에 대해 아무런 조건이 없다는 뜻이다. f에 대한 조건은 정의역이 $\{1,\ldots,n\}$이고 공역이 $\{1,\ldots,k\}$라는 것뿐이다.

이러한 함수 f는 유한열 $\langle f(1),f(2),\ldots,f(n)\rangle$으로 나타낼 수 있다. 각 $f(i)$들은 $1,\ldots,k$ 중 어느 하나의 값을 가진다. $n=1$이라면 이러한 f는 k개 존재한다. 길이가 $n+1$인 유한열은 길이 n의 유한열에 k 개의 가능한 값 중에서 어느 하나를 골라 덧붙이는 것이므로, 이러한 유한열의 개수는

$$(\text{길이 } n\text{의 유한열의 개수})\times k$$

가 될 것이다. 길이가 n인 유한열의 개수는 귀납가설에 의하여 k^n이므로 이제 수학적귀납법에 의하여 110 대상-상자 조합에서 '방법의 수'는 k^n이 됨을 알 수 있다.

110 대상-상자 조합에서 대상을 상자에 넣는 방법의 예를, $n=5$, $k=3$인 경우에 대하여 들어 보자. 대상을 $1,2,3,4,5$라 하고 상자를 $b1,b2,b3$라 하자. $b1$에 5를 넣고, $b2$에 1과 3을 넣고, $b3$에 2와 4를 넣었다면 이 '방법'은 $(\{5\},\{1,3\},\{2,4\})$로 표상하는(represent) 것이 자연스러워 보인다. 그런데 이러한 표상이 3^5개 있다는 사실이 쉽게 파악되는가?

이 '방법'을 표상하는 다른 방법을 생각해 보자. 1은 $b2$에 들어갔고, 2는 $b3$에 들어갔고, 3은 $b2$에 들어갔고, ... 이렇게 각 대상이 들어간 상자를 나열해 보면 $(b2,b3,b2,b3,b1)$을 얻는다. 따라서 이 '방법'을 $(b2,b3,b2,b3,b1)$, 또는 더 간단히 23231로 표상할 수 있을 것이다.

첫 번째 방법은 각 상자에 들어간 대상들의 집합을 나열하였고, 두 번째 방법은 각 대상이 들어간 상자를 나열하였다. $(\{5\},\{1,3\},\{2,4\})\mapsto 23231$이 전단사 함수임을 증명해 보라.

‘방법’ 같은 추상적인 것의 개수를 셀 때는 일단 이것을 구체적인 것(예를 들어 수열)으로 표상해서 이 표상의 개수를 세는 것이 좋다. 그런데 일반적으로 표상하는 방법은 유일하지 않으므로 개수를 세기에 가장 편리한 표상을 찾아야 할 것이다.

111 대상-상자 조합에서의 방법의 수 $T(n,k)$는 포함배제의 원리를 이용하여 (3.2)에서 알아낸 바 있다.

이제 101 조합, 즉 대상은 구별되고, 상자는 구별되지 않으며 빈 상자는 없는 경우에 대하여 알아보자. 이 때의 ‘방법의 수’를 $S(n,k)$로 나타내고 제2종 스털링 수라고 부른다. 그리고 이렇게 대상을 상자에 넣는 것을 “그룹으로 나누었다”고 말한다. 왜냐하면 그룹은 통상 서로 구별하지 않기 때문이다. (‘그룹’은 비어있지 않고 구별되지 않는 상자를 뜻한다고 보면 된다. 물론 그룹은 그 안의 원소들에 의하여는 구별된다.) $S(n,k)$는 111 조합에 대한 답, 즉 $T(n,k)$를 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

전사함수 $f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,k\}$가 주어지면 $f^{-1}(1)$은 상자1에 넣고, $f^{-1}(2)$는 상자2에 넣고, ... 이런 식으로 상자에 넣는다. 이제 상자에 붙은 번호 $1,\ldots,k$를 모두 지워버려 (그리고 상자들의 위치를 뒤섞어 놓아) 상자들을 구별하지 않기로 한다. 그러면 원래는 다른 함수였으나 이제는 구별되지 않는 것들이 생길 것인데, 정확히 $k!$개의 (원래는 달랐던) 함수들이 서로 구별되지 않을 것이다. ‘구별되지 않는 함수’들을 분할(*partition*)이라고 불러도 좋을 것이다. 역으로 생각하면, $\{1,\ldots,n\}$를 k개의 그룹으로 나눈 뒤에, 각 그룹에 번호를 $1,\ldots,k$로 주고 그룹 i에 들어 있는 x들에 대하여 $f(x)=i$로 줌으로써 전사함수 f를 만들어 낼 수 있다. 그러므로 아래의 식을 얻는다.

$$S(n,k)=\frac{T(n,k)}{k!} \tag{3.6}$$

제2종 스털링 수 $S(n,k)$를 $T(n,k)$를 사용하지 않고 직접 얻는 방법이 있다. 이 방법은 ㄱ-열법칙이라고 부르며, 이것으로 닫힌 식은 얻을 수 없지만 점화식을 얻을 수 있다.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1		가	나	1	0
6	0	1			다		1

ㄱ-열법칙은 아래의 식을 말한다.

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k) \quad (*)$$

그림에서는

(가) + (나) × (열번호) = (다)

를 뜻한다.

$(*)$가 성립하는 이유는 n이 혼자서 그룹을 이루는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각하면 알 수 있을 것이다. 이 점화식은 순열 개수의 점화식 2.3과 동일한 형태를 가지지만 초기조건이 다름이 관찰된다.

다음의 정리는 스털링에 의하여 밝혀진 것으로 증명 없이 명제만 제시한다.

정리 *3.41*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k$$

제2종 스털링 수를 알았으니 이제는 제1종 스털링 수에 대하여 알아보자. 이 수는 $s(n,k)$로 나타내며 n명을 k개의 원탁에 앉히는 방법의 수를 뜻한다. $s(n,k)$에 대한 점화식은 ㄱ-행법칙에 의하여 얻을 수 있다.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	2!	3	1	0	0	0
4	0	3!		6	1	0	0
5	0	4!	가	나	10	1	0
6	0	5!		다		15	1

ㄱ-행법칙은 아래의 식을 말한다.

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)\cdot s(n-1,k) \quad (*)$$

그림에서는

(가) + (나) × (행번호) = (다)

를 뜻한다.

$(*)$가 성립하는 이유는 n이 혼자서 한 원탁을 독차지하고 앉는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각하면 알 수 있을 것이다.

정리 *3.42*

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n,k) x^k$$

이제 4번째 대상-상자 조합 100을 생각해 보자. 이것은 n명을 k개의 그룹으로 나누되 공그룹을 허용하는 것이다. 다시 말하면 k개 이하의 그룹으로 나누는 것이다. 따라서 이러한 방법의 개수는 아래의 식으로 얻어진다.

$$\sum_{i=0}^{k} S(n,i)$$

$k = n$인 경우는 n명을 "몇 개의 그룹으로 나누는 방법"이라고 하며 이러한 방법의 수는 벨 수라고 하고 B_n으로 나타낸다: 즉, $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k), \quad n = 0, 1, \ldots$이다.

오해하지 않도록 말해 두겠는데 통상 그룹이라 함은 공집합이 아님을 뜻한다.

지금까지는 대상이 구별되는 경우에 대하여 공부하였다. 이제 대상이 구별되지 않는 경우에 대해서 알아보자.

n개의 바둑돌을 k개의 구별되는 통에 넣는 방법의 개수는 디오판투스 방정식의 음아닌 해의 개수와 같다.

$$x_1 + \cdots + x_k = n \tag{3.7}$$

x_i를 i번째 통에 들어간 바둑돌의 개수로 보는 것이다. 이때 해의 개수가 ${}_kH_n$임은 앞서 구한 바 있다. $x_i = 0$를 허용하는 것은 빈 상자가 있을 수 있다는 뜻이다. 즉, ${}_kH_n$은 대상-상자 조합 010에서 방법의 수이다.

011 대상-상자 조합, 즉 빈 상자를 허용하지 않는 경우는 (3.7)에서 $x_i > 0$ 조건을 만족하는 해만 인정하는 것으로 보면 된다. $x_i - 1 = y_i$로 두면 (3.7)은 $y_1 + \cdots + y_k = n - k$가 되므로, 이때 구하는 방법의 수는 ${}_kH_{n-k}$가 됨을 쉽게 알 수 있다.

이제 n개의 바둑돌을 k개의 그룹으로 나누는 대상-상자 조합, 즉 001에 대해서 방법의 수를 구해보자. 이 방법의 수는 $p(n,k)$로 나타내며 n의 k-분할수(*partition number*)라고 한다.

$p(n,k)$는 자연수 n을 k개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수와 같다. 예를 들면 7을 3개의 자연수의 합으로 나타내는 방법은

$$7 = 5+1+1 = 4+2+1 = 3+3+1 = 3+2+2$$

의 4 가지이므로 $p(7,3) = 4$이다. 디오판투스 방정식에서는 $(x_1,x_2,x_3) = (5,1,1)$과 $(x_1,x_2,x_3) = (1,5,1)$, $(x_1,x_2,x_3) = (1,1,5)$를 서로 다른 3개의 해로 구별하여 본다는 점이 지금과 다르다.

$p(n,k)$는 $n \geq k > 0$인 경우에 대해서만 생각한다. 우선 $p(n,n) = p(n,1) = 1$임을 알 수 있다. $k > n > 0$인 경우에는 $p(n,k) = 0$로 둔다. 그리고 $n > k > 0$에 대한 $p(n,k)$는 아래 정리의 점화식을 사용하여 구할 수 있다.

<u>정리</u> *3.43*

$$p(n,k) = p(n-k,1) + p(n-k,2) + \cdots + p(n-k,k) \tag{3.8}$$

(증명). n개의 바둑돌을 구별이 안 되는 k개의 통에 빈 통이 없도록 넣는 방법의 수를 구하면 된다. 빈 통을 없애기 위하여 먼저 각 통에 1개씩 넣는다. 그리고 남은 $n-k$개의 바둑돌을 k개의 통에 넣을 것인데, 이번에는 바둑돌을 배정받지 못하는 통이 있어도 된다. 즉, 비어있지 않은 통의 개수를 i라 할 때 각 $i = 1,\ldots,k$에 대해서 개수를 세어 모두 더해주면 된다. □

(3.8)을 이용하여 $p(n,k)$ 표를 채우는 과정을 보자. 아래의 3개 표 중 왼쪽 표는 $p(n,n) = p(n,1) = 1$을 이용하여 만든 것이다.

가운데 표는 $p(n,2) = p(n-2,1) + p(n-2,2)$를 $n = 3,\ldots,6$에 대해서 계산한 것이다. $n = 3$에 대한 계산은 붉은색으로 나타내었고, $n = 4$에 대한 계산은 보라색으로 나타내었다.

오른쪽 표는 $p(n,3) = p(n-3,1) + p(n-3,2) + p(n-3,3)$에 대해서 계산한 것이다. $n = 5$에 대한 계산을 붉은색으로 나타내었다.

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1		1	0	0	0
4	1			1	0	0
5	1				1	0
6	1					1

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	1	2		1	0	0
5	1	2			1	0
6	1	3				1

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0
5	1	2	2		1	0
6	1	3	3			1

표를 완성하는데 사용된 (3.8)을 "큰 ㄱ-법칙"이라고 부르기로 하자.

대상-상자의 마지막 조합인 000은 n 개의 바둑돌을 구별 안 되는 k개의 통에 빈 통을 허용하여 넣는 것을 뜻한다. 이것은 n 개의 바둑돌을 구별 안 되는 k개 이하의 통에 빈 통이

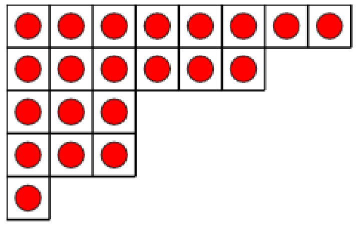
없도록 넣는 것과 같다. 따라서 이렇게 넣는 방법의 수를 $p_k(n)$이라 하면

$$p_k(n) = p(n,1) + \cdots + p(n,k) \tag{3.9}$$

가 된다. $p_n(n) \stackrel{\text{def}}{=} p(n)$을 n의 분할수라고 정의한다.

n을 k개 이하의 자연수의 합으로 (순서를 고려하지 않고) 나타내는 방법 수를 $p_k(n)$이라 하였는데, 이번에는 n을 k 이하의 자연수의 합으로 나타내는 방법 수를 생각해 보자. 이 수를 $q_k(n)$으로 나타내면 $q_k(n) = p_k(n)$임을 패러즈 다이어그램(*Ferrers diagram*)을 통하여 보일 수 있다.

예를 들어 $21 = 8+6+3+3+1$은 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다. 이 그림은 21을 5개 이하의 그룹으로 분할한 하나의 예를 보여 준다.



그런데 이 그림은, 8개의 열 각각에 있는 점들의 개수를 세어 보면, 21을 5 이하의 자연수들로 분할한 하나의 예, 즉 $21 = 5+4+4+2+2+2+1+1$를 보여주는 것으로 해석할 수도 있다.

일반적으로 n을 k개 이하의 그룹으로 분할한 것은, 페레즈 다이어그램을 통하여, n을 k 이하의 자연수들로 분할한 것과 1대1 대응이 된다. 따라서 $q_k(n) = p_k(n)$이다. $(8,6,3,3,1) \mapsto (5,4,4,2,2,2,1,1)$, $(8,6,4,3) \mapsto (4,4,4,3,2,2,1,1)$, ... 가 전단사함수임을 증명해 보라. (먼저 정의역과 공역을 정의해야 한다.)

<u>연습문제</u> 3.44 (p191, #1) 7 명의 사람을 4개의 그룹으로 가르는 방법의 개수를 구하여라. (힌트). 공식 하나로 해결된다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.45 (p191, #2) 수의 집합 X의 원소의 합을 $\sigma(X)$로 나타내기로 하자.
집합 $\{1,2,\ldots,101\}$을 조건

$$\sigma(X_{k+1}) = \sigma(X_k) + 6, \quad (k = 1,2,3,4,5)$$

를 만족하는 6개의 부분집합 $X_1,\ldots,X_k$로 분할하는 것이 가능한가? (힌트). 이 문제는 이 섹션에서 공부한 내용과 무관하다. 단순한 등차수열 문제임. ⊣

<u>연습문제</u> 3.46 (p191, #3) n 개의 서로 다른 소수의 곱으로 표현되는 자연수를 $k \le n$ 개의 인수의 곱으로 나타내는 방법의 개수를 구하여라. (힌트: p172 #3.3.2. 인수 1 허용?) ⊣

<u>연습문제</u> 3.47 (p191, #6) 자연수 n을 1과 2의 합으로 나타내는 방법(더하는 순서를 바꾸는 것은 다른 방법인 것으로 간주)의 개수를 $A(n)$이라 하고, 2 이상의 자연수들의 합으로 나타내는 방법(더하는 순서를 바꾸는 것은 다른 방법인 것으로 간주)의 개수를 $B(n)$이라고 하면 $A(n) = B(n+2)$임을 증명하라. (힌트). $n = 1,2,3,4,5,6$에 대해서 $A(n)$과 $B(n+2)$을 각각 구하여 값이 같음을 확인한다. 이때 각 방법, 즉 수열들을 모두 나열하고 관찰하여 문제풀이에 유용한 패턴을 찾는다. $A(n)$ 중에 2의 개수가 k인 것들의 개수를 구하는 식은 비교적 쉽게 구할 수 있다. 이것이 $B(n+2)$ 중에 $k+1$개의 합인 것들의 개수 ${}_{k+1}H_{n+2-2(k+1)}$와 같음을 계산에 의하여 확인한다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.48 (p191, #7) 자연수 n을 서로 다른 자연수들의 합으로 나타내는 방법의 개수를 $A(n)$이라 하고, 홀수인 자연수들의 합으로 나타내는 방법의 개수를 $B(n)$이라 하면 $\forall n \in \mathbb{N}(A(n) = B(n))$임을 증명하여라. 단, 순서만 바꾸어 더하는 것은 같은 방법으로 간주한다. ⊣

(힌트).

$9+1 \;\to\; 1\cdot 9+1\cdot 1 \;\to\; 9+1$

$7+3 \;\to\; 1\cdot 7+1\cdot 3 \;\to\; 7+3$

$7+1+1+1 \;\to\; 1\cdot 7+3\cdot 1 \;\to\; 1\cdot 7+(2{+}1)\cdot 1 \;\to\; 7+2+1$

$5+5 \;\to\; 2\cdot 5 \;\to\; 10$

$5+3+1+1 \;\to\; 1\cdot 5+1\cdot 3+1\cdot 2 \;\to\; 5+3+2$

$5+1+1+1+1+1 \;\to\; 1\cdot 5+5\cdot 1$

$\to\; 1\cdot 5+(4{+}1)\cdot 1 \;\to\; 5+4+1$

$3+3+3+1 \;\to\; 3\cdot 3+1\cdot 1 \;\to\; (2{+}1)\cdot 3+1\cdot 1 \;\to\; 6+3+1$

$3+3+1+1+1+1 \;\to\; 2\cdot 3+4\cdot 1 \;\to\; 6+4$

$3+1+1+1+1+1+1+1 \;\to\; 1\cdot 3+7\cdot 1$

$\to\; 1\cdot 3+(1{+}2{+}4)\cdot 1 \;\to\; 4+3+2+1$

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \;\to\; 10\cdot 1 \;\to\; (8{+}2)\cdot 1 \;\to\; 8+2$

<u>연습문제</u> 3.49 (p192, #9) 제1 스털링 행렬의 제n행의 합을 구하여라. (힌트). 행렬을 그리고 값을 유추하여 n의 식으로 나타낸다. 그리고 ㄱ-행법칙과 수학적귀납법을 사용하여 이것이 옳음을 증명한다. ⊣

<u>연습문제</u> 3.50 (p192, #12) 다음 등식을 증명하여라.

(1) $S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}j^n$

(2) $S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}S(j,k-1)$ ⊣

<u>연습문제</u> 3.51 (p193, #14) 집합 $X = \{1, 2, \ldots, 14\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) X를 공집합이 아닌 4개의 부분집합으로 분할하는 방법의 개수. (힌트). 대상-상자 조합 101

(2) X를 크기가 2, 3, 4, 5인 4개의 부분집합으로 분할하는 방법의 개수. (힌트). p70, 일반화된 조합

(3) X를 크기가 3, 3, 4, 4인 4개의 부분집합으로 분할하는 방법의 개수. (힌트). 일반화된 조합과 약간 다름. ⊣

<u>연습문제</u> 3.52 (p193, #15) 아래의 문제에서 자연수는 1 이상의 정수를 뜻한다.

(1) 합이 n인 자연수열의 개수를 구하여라. (힌트). 길이가 k인 경우에는 디오판투스 방정식을 활용하면 된다. $k = 1, \ldots, n$에 대한 개수를 구하여 모두 더하면 된다.

(2) 합이 n인 음아닌 정수의 수열의 개수를 구하여라. 단, 수열의 길이는 n 이하인 것으로 제한한다.

(3) 합이 n인 단조증가 자연수열의 개수를 구하여라. (힌트). 분할수 ⊣

<u>연습문제</u> 3.53 (p193, #18) n-집합에서 k-집합으로 가는 함수로서 변역의 원소의 개수가 r인 것들의 개수는 ${}_kP_r \cdot S(n,r)$임을 증명하여라. (힌트). $T(n,r)$과 $S(n,r)$의 관계를 이용한다. ⊣

3.4 카탈란 수

카탈란 수(*Catalan number*) C_n은 다음과 같이 정의되는 수이다.

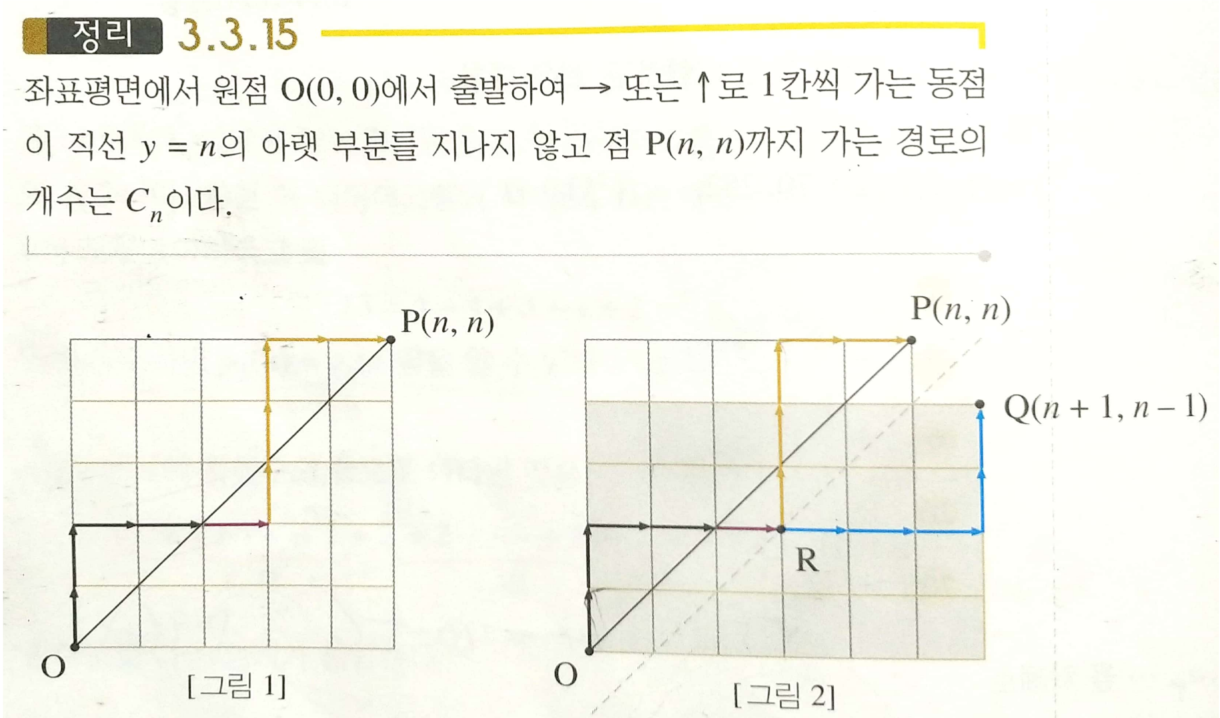
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

먼저 확인할 것은 C_n은 항상 자연수라는 사실이다.

Proof.

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot\frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{n+1}{n+1}\binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

□


정리 3.3.15

좌표평면에서 원점 O(0, 0)에서 출발하여 → 또는 ↑로 1칸씩 가는 동점이 직선 $y = n$의 아랫 부분를 지나지 않고 점 P(n, n)까지 가는 경로의 개수는 C_n이다.

[그림 1] [그림 2]

Proof. 오타를 다음과 같이 수정하고

"직선 $y = n$의 아랫부분를" ⇒ " 직선 $y = x$의 아랫부분을"

"직선 $y = x$"를 "대각선"이라고 부르기로 한다.

O에서 $P(n, n)$까지 가는 (최단)경로 전체의 집합을 $\mathcal{P}$, O에서 $Q(n+1, n-1)$까지 가는 (최단)경로 전체의 집합을 $\mathcal{Q}$라 했을 때 $\mathcal{P}$의 원소는 곧 다중집합 $\{n \times \vec{\imath}, n \times \vec{\jmath}\}$의 순열이므로 $|\mathcal{P}| = \binom{2n}{n}$이다. 같은 방법으로 $|\mathcal{Q}| = \binom{2n}{n+1}$임을 알 수 있다. 이제 $C_n = |\mathcal{P}| - |\mathcal{Q}|$라는 사실을 이용하여 이 정리를 증명할 수 있다.

대각선의 아랫부분을 지나는 원소들로 이루어진 $\mathcal{P}$의 부분집합을 $\mathcal{A}$라고 하자. 우리가 보이고자 하는 것은 $|\mathcal{P} - \mathcal{A}| = C_n$이다. $|\mathcal{P} - \mathcal{A}| = |\mathcal{P}| - |\mathcal{A}|$이고 $C_n = |\mathcal{P}| - |\mathcal{Q}|$이므로 결국 $\mathcal{A}$와 $\mathcal{Q}$의 원소들 간에 1대1 대응이 존재한다는 것을 보이면 된다.

$\mathcal{A}$의 원소 하나를 $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_{2n}$이라고 하고 최초로 대각선 아래에 위치하는 벡터를 "키벡터" 라고 부르기로 하자. 위의 그림에서는 $\mathcal{A}$의 원소 하나를 그리고 그것의 키벡터를 고동색으로 나타내었다.

키벡터 이후의 경로를 갈색으로 나타내었는데 이 부분을 $y = x - 1$에 대칭시켜 얻은 파란색 경로를 키벡터까지의 경로에 이어붙이면 Ω의 원소가 된다.

이런 방식으로 $\mathcal{A}$의 원소에 Ω의 원소를 대응시키면 된다. □

4 점화식과 생성함수

4.1 점화식

개수를 헤아리는 이산수학 문제에서는 구하는 값이 점화식에 의해 주어지는 경우가 많다.

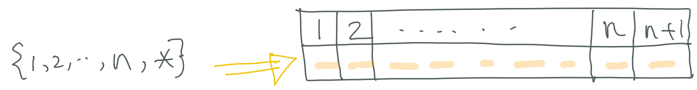
예제 4.1 (p202: 4.2.1) 2개의 시그널 x, y를 전송하는 데 각각 1초, 2초가 소요된다고 하자. 임의의 x, y의 유한열을 "코드워드"라고 한다. 전송 소요시간이 n초인 코드워드의 개수를 a_n이라고 할 때 $\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2, \ldots)$의 점화식을 구하고, 또 일반항을 구하는 데 필요한 초깃값을 구하여라.

(풀이). 전송 소요시간이 n초인 유한열에는 x로 시작하는 것이 a_{n-1}개, y로 시작하는 것이 a_{n-2}개 있으므로 점화식은

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

가 된다. 일반항을 구하는 데는 초깃값 a_1과 a_2가 필요할 것인데, 1초 만에 전송되는 코드워드는 x 하나 뿐이고, 2초 만에 전송되는 코드워드는 xx와 y의 2개가 있으므로 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$이다. ⊣

Discussion 4.2 (일반화된 교란수) $n+k$개의 대상들의 순열로서 그 중 n 개에는 허용되지 않은 위치가 각각 하나씩 있고, k 개는 아무 곳에 위치해도 되는 것들을 k-와일드교란순열이라 하고 이들의 집합을 $\mathcal{D}_{(n,k)}$, 개수를 $D_{(n,k)}$로 나타낸다. 먼저 $k=1$인 경우를 아래에 보였다.



각 $i \le n$는 i번째 자리에 놓일 수 없고 $*$는 아무 곳에 놓여도 된다.

(i) $*$가 $n+1$ 자리에 놓인 경우 : n개의 대상 $1, \ldots, n$이 특정 위치에 놓일 수 없으므로 D_n 개

(ii) $*$가 $n+1$ 이외의 자리에 놓인 경우 : $n+1$ 개의 대상 $1, \ldots, n, *$가 특정 위치에 놓일 수 없으므로 D_{n+1} 개

따라서 $\boxed{D_{(n,1)} = D_n + D_{n+1}}$.

이제 2-와일드교란순열의 개수 $D_{(n,2)}$에 대해서 알아보자. 위치 $1, \ldots, n, n+1, n+2$에 대상 $1, \ldots, n, a_1, a_2$를 놓는데 각 $i = 1, \ldots, n$에 대해서 i는 i 자리에 놓일 수 없고 a_1, a_2는 위치에 대한 제한이 없다.

a_1이 $n+1$ 자리에 놓이는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각한다. 전자의 경우에는 주어진 조건을 만족하는 순열들의 개수는 $D_{(n,1)}$이다. 후자의 경우에는 주어진 조건을 만족하는 순열들의 개수는 $D_{(n+1,1)}$이다. 그러므로

$$D_{(n,2)} = D_{(n,1)} + D_{(n+1,1)} = (D_n + D_{n+1}) + (D_{n+1} + D_{n+2}) = D_n + 2D_{n+1} + D_{n+2}$$

이다. 즉, $\boxed{D_{(n,2)} = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} D_{n+i}}$이다.

이제 $D_{(n,k)}$를 어떻게 나타내어야 할지 추측할 수 있을 것이다. ⊣

예제 4.3 (p202: 4.2.2) 교란수 D_n은 다음의 두 점화식을 모두 만족한다. (see p161)

(1) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, $(n \geq 3)$

(2) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, $(n \geq 2)$

(풀이). (1) (1) 교란순열의 집합 $\mathcal{D}_n$을 맨 앞자리 수 r에 따라 분할하여 $\mathcal{D}_n = \bigcup_{r=2}^{n} \mathcal{D}_{n,r}$로 두자. ($\mathcal{D}_{(n,r)}$이 아니라 $\mathcal{D}_{n,r}$임에 유의.) $|\mathcal{D}_{n,r}|$은 r의 값에 무관하게 일정할 것이다. $2, \ldots, n$으로 번호가 매겨진 $n-1$개의 위치에 $1, \ldots, r-1$, $r+1, \ldots, n$이 놓여야 하는데, 이들 중에 1은 어느 곳에 놓여도 되고 1을 제외한 $n-2$개의 대상들은 특정자리에 놓일 수 없으므로 $|\mathcal{D}_{n,r}| = D_{(n-2,1)} = D_{n-1} + D_{n-2}$가 된다. 따라서

$$D_n = (n-1) \cdot |\mathcal{D}_{n,r}| = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

이다.

(2) $E_n \stackrel{\text{def}}{=} D_n - nD_{n-1}$로 두고 $E_n = (-1)^n$을 보이면 된다. 이것은 E_n에 대한 점화식을 (1)을 이용하여 얻어 놓으면 쉽게 해결된다. ⊣

<u>연습문제</u> 4.4 $D_{(n,2)}$에 대한 다음의 점화식이 성립함을 보여라.

$$D_{(n,2)} = 2D_n + 4D_{n+1} + n(n-1)D_{(n-2,2)}$$

(힌트). $n+1$과 $n+2$ 자리에 들어가는 a_1, a_2의 개수가 2일 때, 1일 때, 0일 때의 3 경우로 나누어 생각한다. ⊣

<u>정의</u> 4.5 (P203) $r \in \mathbb{N}$에 대하여 다음과 같은 형태의 점화식을

$$\begin{aligned} &a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots c_r a_{n-r} + f(n),\ (n \geq r), \\ &(\text{단},\ c_1, \ldots, c_r\text{은 상수},\ c_r \neq 0,\ f(n)\text{은 } n\text{에 대한 식}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

수열 $(a_n)_n$에 대한 r계 선형점화식(*linear recurrence relation of order r*)이라고 한다. $f(n) = 0$인 경우 이 점화식을 선형동차점화식(*linear homogeneous recurrence relation*)이라고 한다. ⊣

예를 들어 $a_n = na_{n-1}$은 선형점화식이 아니다. 그리고 $a_n = a_{n-1} + 2$는 선형동차점화식이 아니다.

우리는 먼저 선형동차점화식의 일반항을 구하는 방법을 공부하고, 그 다음에 일반적인 선형점화식의 일반항을 구하는 방법을 찾아낼 것이다.

DISCUSSION 4.6 점화식 $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$의 일반항을 a_1과 a_2를 사용한 식으로 나타내는 방법을 알아보자. 주어진 식은 $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$와 동등하므로, 새로운 수열 $(b_n)_n$을 $b_n \stackrel{\text{def}}{=} a_n - a_{n-1}$로 정의하면 $b_n = 2b_{n-1}$이라는 등비수열의 점화식을 얻어서 해결할 수 있다.

이번에는 점화식 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$의 일반항을 구해 보자. 주어진 식을 이와 동등한 $a_n - \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2})$ 형태의 식으로 변환할 수 있다면 $b_n \stackrel{\text{def}}{=} a_n - \alpha a_{n-1}$로 두면 $b_n = \beta b_{n-1}$이라는 등비수열의 점화식을 얻어서 해결할 수 있을 것이다. 계산해 보면, $\alpha + \beta = 5$, $\alpha\beta = 6$이라는 연립방정식을 얻어 $(\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$의 해를 얻게 된다.

방금 소개한 방법은 임의의 2계 선형동차점화식의 일반항을 구하는 해법으로 사용될 수 있다. 일반적인 r계 선형동차점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r},\ (c_r \neq 0),\ (n \geq r) \tag{**}$$

의 일반항을 구하는 방법을 기술하겠다.

먼저 관련 용어들을 정의한다: x에 대한 r차 방정식

$$x^r - c_1x^{r-1} - \cdots - c_{r-1}x - c_r = 0 \tag{4.2}$$

를 점화식 (∗∗)의 특성방정식(*characteristic equation*)이라고 하고 이 방정식의 해를 특성근(*characteristic root*)이라고 한다. ⊣

간단하지만 유용한 보조정리를 증명없이 아래에 소개한다.

<u>보조정리</u> *4.7* (*PP204–205*)

(*1*) $\lambda \neq 0$가 점화식 (∗∗)의 특성근인 것은 $a_n = \lambda^n$이 이 점화식을 만족할 필요충분조건이다. (강의노트 *43*쪽의 (∗1) 이하에 충분조건에 대한 증명이 나와 있다. 필요조건에 대한 증명은 더 쉽다.)

(*2*) n에 관한 몇 개의 식 $\varphi_1(n), \ldots, \varphi_k(n)$이 각 i에 대해서, $a_n = \varphi_i(n)$로 두었을 때 점화식 (∗∗)이 만족된다면, $\varphi_i(n)$들의 임의의 선형조합을 a_n으로 두었을 때에도 (∗∗)가 만족된다.

(*3*) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$가 모두 점화식 (∗∗)의 특성근이면, λ_i^n의 임의의 선형조합을 a_n으로 두었을 때에도 (∗∗)가 만족된다. ⊣

위의 보조정리를 이용하여 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$로 주어진 수열의 일반항을 구해 보자. 이 점화식의 특성방정식은 $x^2 - 5x + 6 = 0$이므로 특성근은 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$으로 둘 수 있다. 따라서 $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n$으로 두었을 때 $a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $a_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1$이므로 $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, -1)$을 얻는다. 그러므로 일반항은 $a_n = 2^{n+1} - 3^n$, $(n \geq 0)$이다.

<u>정리</u> *4.8* (*P206: 4.2.6*) r계 선형동차점화식 (∗∗)이 r 개의 서로 다른 특성근 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$을 가진다면 이 점화식을 만족하는 수열 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$의 일반항은 적당한 상수 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$에 대하여

$$a_n = \alpha_1\lambda_1^n + \cdots \alpha_r\lambda_r^n \tag{\#}$$

으로 나타낼 수 있다.

(증명). 먼저 초깃값 $a_0, \ldots, a_{r-1}$들이 임의로 주어졌을 때, 각 $n = 0, \ldots, r-1$에 대하여 (#)를 만족하는 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$이 유일하게 존재함을 증명하겠다.

(#)가 $n = 0, \ldots, r-1$에 대하여 성립한다는 것을 말하는 r 개의 등식은 아래의 행렬을 사용하여

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix}, \ \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \ \vec{v} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{bmatrix}$$

하나의 식 $A\vec{x} = \vec{v}$로 나타낼 수 있다. 이 연립방정식의 해가 유일하게 존재함을 보여야 하는데, 이는 곧 A가 가역행렬임을 의미하며, 이를 위하여 A의 행들이 선형독립임을 보이겠다. 각 $i = 0, \ldots, r-1$에 대하여 A의 i행을 A_i로 두었을 때, 모든 $b_0, \ldots, b_{r-1} \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\sum_{i=0}^{r-1} b_iA_i = (0, \ldots, 0) \text{ 이면} \tag{4.3}$$

$(\forall i)(b_i = 0)$

가 성립함을 보이면 된다. 여기서 x에 대한 $r-1$-차 이하의 다항식 $g(x)$를

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} b_0 + b_1 x + \cdots b_{r-1}x^{r-1}$$

로 두면 (4.3)의 좌변은 $(g(\lambda_1), g(\lambda_2), \ldots, g(\lambda_r))$이며 이것이 우변 $\vec{0}$와 같다는 것은 $g(x)$가 서로 다른 해 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$을 가짐을 의미한다.

$g(x)$는 차수가 $r-1$ 이하인 다항식인데 r 개의 서로 다른 해를 가지므로 $(\forall x \in \mathbb{R})(g(x) = 0)$ 이어야만 한다. 이는 곧 $(\forall i)(b_i = 0)$를 함의한다. 이로써 각 $n = 0, \ldots, r-1$에 대하여 (#)를 만족하는 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$이 유일하게 존재함이 증명되었다.

이제 이렇게 구한 α_i들에 대하여 수열 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$를 (#)에 의해서 정의했을 때 이 수열이 점화식 (**)을 만족하는 것은 앞서 나왔던 보조정리 4.7에 의하여 확인된다. 즉, 각 λ_i^n이 (**)를 만족하며 a_n은 이들의 선형조합이므로 역시 (**)를 만족한다. □

<u>예제</u> 4.9 (PP208–209) 4.2.8, 4.2.9 ⊣

이로써 r계 선형동차점화식과 초깃값조건에 의하여 정의된 수열의 일반항을 구하는 문제는 "서로 다른 특성근의 개수가 r이라는 조건 하에는" 해결되었다. 각 특성근 λ_i에 대하여 $a_n = \lambda_i^n$은 주어진 점화식 (**)을 만족하며 이들의 임의의 선형조합도 역시 (**)를 만족한다는 것, 그래서 r계 점화식의 일반해를 위하여는 점화식을 만족하는 r개의 "해" $a_n = \lambda_1^n, \ldots, \lambda_r^n$가 있으면 충분하다는 것이다.

r계 선형동차점화식이 중근을 가질 때는 점화식의 해의 개수가 λ_i^n 형태로는 r 미만이라는 문제가 발생한다.

이 문제는 미분에 의하여 해결할 수 있으며 대략적인 아이디어는 다음과 같다: 선형동차점화식과 그것의 특성방정식을 아래에 보였다.

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r}, \ (n \geq r) \tag{$*1$}$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^r - c_1 x^{r-1} - \cdots - c_{r-1}x - c_r = 0 \tag{$*2$}$$

특성방정식 $f(x) = 0$가 λ를 해로 가진다면 $(*2)$의 양변에 x^{n-r}을 곱하고 $x := \lambda$로 치환한 다음 항들을 적당히 이항하면 $\lambda^n = c_1\lambda^{n-1} + \cdots c_r\lambda^{n-r}$을 얻게 되어 $(*1)$이 $a_n := \lambda^n$에 대하여 만족됨을 알 수 있다.

만일 $f(x) = 0$가 λ를 중근으로 가진다면 $f(x) = (x-\lambda)^2 h(x)$로 놓을 수 있고, 양변을 미분하면 $f'(x) = 2(x-\lambda)h(x) + (x-\lambda)^2 h'(x)$가 되어 $f'(\lambda) = 0$임을 알 수 있다. $f(x)x^{n-r} = 0$도 λ를 중근으로 가지므로 $f^{[1]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot (f(x)x^{n-r})'$로 두면 $f^{[1]}(\lambda) = 0$가 될 것이다. 그런데

$$\begin{aligned} f^{[1]}(x) &= x \cdot \left(nx^{n-1} - c_1(n-1)x^{n-2} - \cdots - c_r(n-r)x^{n-r-1}\right) \\ &= nx^n - c_1(n-1)x^{n-1} - \cdots - c_r(n-r)x^{n-r} \end{aligned}$$

이므로 $f^{[1]}(\lambda) = 0$는

$$n\lambda^n = c_1(n-1)\lambda^{n-1} + \cdots + c_r(n-r)\lambda^{n-r}$$

를 함의하며 이는 $a_n = n\lambda^n$으로 두었을 때 a_n이 점화식 $(*1)$을 만족한다는 것을 의미한다.

그러므로 우리는 특성방정식의 하나의 해 λ에 대하여 점화식의 해로 $a_n = \lambda^n$과 $a_n = n\lambda^n$, 이렇게 2개를 얻을 수 있다.

이상의 아이디어를 일반화한 것이 pp210–214에 나와 있으며, 결과만 기술하면 다음과 같다.

NOTATION 4.10 (P210) 다항식 $f(x)$에 대하여,

$$f^{(0)}(x) = f, \quad f^{(k+1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(k)},$$
$$f^{[0]}(x) = f, \quad f^{[k+1]} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{[k]}. \qquad \dashv$$

따름정리 *4.11 (P211: 4.2.11)* $f(x)$가 다항식이고 $\lambda \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$이면

$$(\forall i < p)(f^{(i)}(x) = 0) \iff (\forall i < p)(f^{[i]}(x) = 0) \qquad \dashv$$

따름정리 *4.12 (P211: 4.2.12)* $x = \lambda$가 점화식 ($**$)의 특성방정식의 p-중근이면

$$\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{p-1}\lambda^n$$

의 각각은 점화식 ($**$)을 만족한다. $\dashv$

정리 *4.13* 서로 다른 $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$에 대하여 점화식 ($**$)의 특성방정식이

$$(x-\lambda_1)^{p_1}(x-\lambda_2)^{p_2}\cdots(x-\lambda_q)^{p_q} = 0$$

라면 점화식 ($**$)에 의하여 정의되는 수열의 일반항은

$$\begin{array}{l}
\lambda_1^n, n\lambda_1^n, n^2\lambda_1^n, \ldots, n^{p_1-1}\lambda_1^n, \\
\lambda_2^n, n\lambda_2^n, n^2\lambda_2^n, \ldots, n^{p_2-1}\lambda_2^n, \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\lambda_q^n, n\lambda_q^n, n^2\lambda_q^n, \ldots, n^{p_q-1}\lambda_q^n
\end{array}$$

들의 선형조합으로 나타낼 수 있다. 위의 각 행에 나타나는 항들의 개수는 일정하지 않으며 이들을 모두 더하면 $p_1 + \cdots + p_q$개 이다. $\dashv$

예제 4.14 p214: 4.2.14 $\dashv$

이제 일반선형점화식 (4.1)의 해법을 알아 보자. 점화식 (4.1)을 아래에 다시 보였다.

$$\begin{array}{l}
a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots c_r a_{n-r} + f(n),\ (n \geq r), \\
(\text{단, } c_1, \ldots, c_r \text{은 상수, } c_r \neq 0,\ f\text{는 } n\text{에 대한 식})
\end{array} \qquad (*)$$

($*$)에서 $f(n)$을 제거하여 얻은 선형동차점화식을 부속동차점화식이라고 한다. 만일 ($*$)의 특수해를 구했다면, 그것을 $p(n)$이라 하고 부속동차점화식의 일반해를 $g(n)$이라 했을 때

$$F(n) \stackrel{\text{def}}{=} g(n) + p(n)$$

은 ($*$)의 일반해가 된다. 즉 $a_n = F(n)$으로 두면 ($*$)가 만족되고, 역으로 ($*$)를 만족하는 모든 a_n은 $a_n = g(n) + p(n)$ 형태가 된다.

점화식에 주어지는 초기조건은 일반해에 나타나는 미정계수를 결정하는 데 쓰이며 특수해와는 아무런 상관이 없다.

모든 일반선형점화식에 대하여 특수해를 기계적으로 구할 수 있는 일반적인 방법은 없으나, 흔히 나타나는 일반 선형점화식에 대해서는 다음과 같은 방법을 사용하면 대부분 답이 얻어진다.

(1) $f(n)$이 n에 대한 d차 다항식일 때

- 1이 부속동차점화식의 특성근이 아닐 때 $p(n) = (n$에 대한 d차 다항식$)$
- 1이 부속동차점화식의 중복도 p의 특성근이면 $p(n) = n^p \cdot (n$에 대한 d차 다항식$)$

(2) $f(n)$이 n에 대한 지수함수에 상수를 곱한 것, 즉 $f(n) = kc^n$꼴 일때

- c가 부속동차점화식의 특성근이 아닐 때 $p(n) = \beta c^n$
- c가 부속동차점화식의 중복도 p의 특성근이면 $p(n) = \beta n^p \cdot c^n$

예제 4.15 pp216–219: 예제 4.2.15–4.2.18 ⊣

연습문제 4.16 (P221: #6) 길이가 n인 $\{0,1,2\}$-유한열 중에 다음 조건을 만족하는 원소들의 개수 a_n의 점화식을 구하여라. (힌트). 아래의 3문제 모두, 수열이 0으로 시작하는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각하면 된다.

(1) 짝수개의 0이 나타난다. (힌트). 해답에는 점화식 대신 일반항이 나와 있는데, 점화식을 구하고 이 일반항이 점화식을 만족함을 확인하여라. 점화식을 구할 때는 홀수 개의 0을 가지는 길이 n의 $\{0,1,2\}$-수열의 개수는 $3^n - a_n$ 임에 착안한다.

(2) 00이 부분수열로 나타나지 않는다.

(3) 012가 부분수열로 나타나지 않는다. (힌트). $a_1, a_2, \ldots, a_5$까지 구해 보면 책의 해답은 틀렸음을 알 수 있다. a_6도 구해 보라. a_7도 구할 수 있겠는가? 점화식은 $a_n = 2a_{n-1} +$ "0으로 시작하는 길이 n의 유한열 중 012가 나타나지 않는 것들의 개수"로 놓으면 될 것이다. 따옴표 부분이 말하는 수열을 $\sigma \overset{\text{def}}{=} 0\tau$로 놓으면 τ는 길이 $n-1$의 $\{0,1,2\}$-수열로서 012가 나타나지 않고 또한 12로 시작하지 않는다. 즉,

- $A = \{0,1,2\}^{n-1}$의 원소 중에서 012가 나타나는 것들의 집합,
- $B = \{0,1,2\}^{n-1}$의 원소 중에서 12로 시작하는 것들의 집합

로 두었을 때 τ는 $A^c \cap B^c$의 원소, 즉 $\{0,1,2\}^{n-1} - (A \cup B)$의 원소이다.

$$|A| = 3^{n-1} - a_{n-1}, \quad |B| = 3^{n-3}, \quad |A \cap B| = 3^{n-3} - a_{n-3}$$

이므로

$$|A^c \cap B^c| = 3^{n-1} - \Big((3^{n-1} - a_{n-1}) + 3^{n-3} - (3^{n-3} - a_{n-3})\Big) = a_{n-1} - a_{n-3}$$

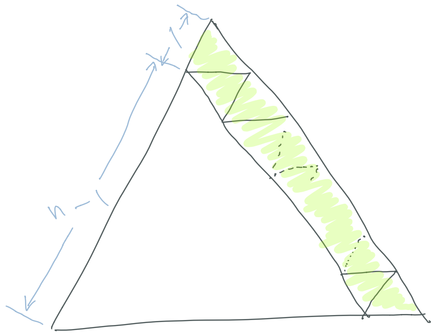
가 된다. (참고: 이렇게 얻은 점화식이 모든 $n \geq 3$에 대해서 성립하도록 하려면 a_0를 1로 두면 된다. 이것은 길이 0인 수열의 개수를 1로 보는 수학의 관례에 부합된다.) ⊣

연습문제 4.17 (P222: #9) 한 변의 길이가 n인 정삼각형을 한 변의 길이가 1인 정삼각형들로 나누어 놓은 것을 "크기 n의 정삼각형"이라고 부르기로 한다. 크기 n의 정삼각형에 포함된 크기 1부터 크기 n에 이르는 모든 삼각형과 역삼각형의 개수를 a_n이라 했을 때 이것의 식을

구하여라. (이 문제는 점화식의 문제라고 말하기에는 썩 적당하지 않다고 본다.)
(힌트).

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ a_{n-1} + f(n), & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

로 둘 것인데 여기서 $f(n)$은 오른쪽 그림에서 녹색 부분을 일부 또는 전부로 가지는 모든 정삼각형과 역정삼각형들의 개수를 뜻한다. $f(2) = 4, f(3) = 8, f(4) = 14$이다. $f(5)$와 $f(6)$를 구하여라. $a_n = a_1 + f(2) + \cdots + f(n)$이다.



$f(n)$은 다양한 크기를 가진 삼각형들의 개수인데 정삼각형의 크기는 1부터 n까지이고, 역정삼각형의 크기는 1부터 $\lfloor n/2 \rfloor$까지이다. (why?) 크기 k의 정삼각형의 개수는 $n + 1 - k$이고, 역정삼각형의 개수는 $n + 1 - 2k$이다. (why?)

$$f(n) = \begin{cases} \frac{3}{4}n^2 + \frac{n}{2}, & \text{if } n \text{ even}, \\ \frac{3}{4}n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, & \text{if } n \text{ odd} \end{cases} \tag{4.4}$$

를 보일 수 있을 것이다. $f(1) = 1$이므로 $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$으로 두면 된다. 이것을 계산할 때 k가 홀수값과 짝수값을 교대로 취하는 것에 유의해야 한다. 또는 (4.4)를 짝수/홀수의 경우로 나누지 않고 $(-1)^n$을 이용하여 하나의 식으로 표현하는 것도 좋은 해결 방법이다. ⊣

4.2 생성함수

<u>정의</u> 4.18 (P224) 수열 $\vec{a} \overset{\text{def}}{=} (a_n)_{n=0}^{\infty}$의 생성함수(*generating function*)는 멱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

을 뜻한다. 즉, a_n은 그것의 생성함수의 n차 항의 계수이다. ⊣

REMARK 4.19 생성함수는 어떤 수렴구간이 있어, 이에 속하는 모든 x에 대하여 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = g(x)$가 성립하는 닫힌 형식의 $g(x)$가 존재할 때 비로소 유용하다. 멱급수는 수렴구간의 내부(interior)에서는 자유로이 항별로(term by term) 미분/적분해도 된다.

$f(x)$가 0 근방에서의 해석적 함수인 경우에는 이것의 매크로린 급수는 수열 $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}$의 생성함수가 된다. ⊣

<u>예제</u> 4.20 유용한 몇 개의 수열에 대한 생성함수를 아래에 보였다.

$$\begin{aligned} &(1, 1, 1, \ldots) : 1 + x + x^2 + \cdots &&= \frac{1}{1-x} \\ &({}_nC_0, {}_nC_1, {}_nC_2, \ldots) : {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots &&= (1+x)^n \\ &({}_nH_0, {}_nH_1, {}_nH_2, \ldots) : {}_nH_0 + {}_nH_1 x + {}_nH_2 x^2 + \cdots &&= \frac{1}{(1-x)^n} \end{aligned}$$

⊣

위의 예에서 3번째 등식은 아래의 작업을 통하여 얻을 수 있다.

정의 4.21 (P80, P97) 실수 x와 음아닌 정수 r에 대하여 하강계승 (*falling factorial*) $[x]_r$과 상승계승(*rising factorial*) $[x]^r$을 다음과 같이 정의한다.

$$[x]_r \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x(x-1)\cdots(x-r+1), & \text{if } r>0, \\ 1, & \text{if } r=0. \end{cases}$$

$$[x]^r \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x(x+1)\cdots(x+r-1), & \text{if } r>0, \\ 1, & \text{if } r=0. \end{cases}$$

정의로부터 $x \stackrel{\text{def}}{=} n \in \mathbb{N}$인 경우에는 $[n]_r = {}_nP_r$, $\frac{[n]_r}{r!} = {}_nC_r$, $[n]^r = {}_{n+r-1}P_r$, $\frac{[n]^r}{r!} = {}_{n+r-1}C_r = {}_nH_r$임을 알 수 있다.

실수 α와 정수 r에 대하여 다음과 같이 2항계수의 확장 $\binom{\alpha}{r}$을 정의한다.

$$\binom{\alpha}{r} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{[\alpha]_r}{r!}, & \text{if } r \geq 1, \\ 1, & \text{if } r=0, \\ 0, & \text{if } r<0. \end{cases}$$ ⊣

예제 4.22 (P97: 2.4.9)

(1) $n, k \in \mathbb{N}$일 때 $\binom{-n}{k} = (-1)^k {}_nH_k$.

(2) $k \in \mathbb{N}$일 때 $\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k2^{k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$

(증명). (1)이 성립함은 정의를 따라 계산해 보면 곧 알 수 있다. (2)의 증명은 다음과 같은 계산으로 확인된다.

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{k} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k-3)(2k-2)}{k!\cdot 2\cdot 4\cdots(2k-2)} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\cdot\frac{(2k-2)!}{k\cdot(k-1)!\cdot 2^{k-1}(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k2^{2k-1}}\cdot\binom{2k-2}{k-1} \end{aligned}$$ □

정리 *4.23* (뉴튼의 *2*항정리, *P99: 2.4.11*) 실수 α와 x에 대하여

$$(1+x)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^r, \quad \text{for } |x|<1 \tag{4.5}$$

이 성립한다. (이것은 $\alpha = n \in \mathbb{N}$인 경우에는 우리에게 익숙한 *2*항정리로 환원된다. 이때는 $|x|<1$이라는 조건은 필요없다.)

(증명). 먼저 수렴성을 보이기 위하여 ratio test를 쓰면

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{r+1}x^{r+1}}{\binom{\alpha}{r}x^r}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|\frac{\alpha-r}{r+1}\right|\cdot|x| < 1$$

이므로 우변이 잘 정의됨을 알 수 있다. 그 다음은 $x \mapsto (1+x)^\alpha$가 해석적 함수이므로 맥로린 급수를 쓰면 된다. (x^r의 계수는 $\frac{d^n}{dx}(1+x)^r|_{x=0}/r! = [\alpha]_r/r! = \binom{\alpha}{r}$ 이다.) □

예제 4.24 (P101: 2.4.12) $|x| < 1$, $n \in \mathbb{N}$일 때 다음을 멱급수로 나타내 보자.

(1) $\frac{1}{(1+x)^n}$, (2) $\sqrt{1+x}$

(풀이). (1), (2) 모두에 뉴튼의 2항정리를 사용한다.

$$\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}x^r\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r{}_nH_r x^r \quad \text{(by 예제 4.22.(1))}\\ (1+x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{r}x^r\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r2^{2r-1}}\binom{2r-2}{r-1}x^r \quad \text{(by 예제 4.22.(2))}\end{aligned}$$ ⊣

바로 위 예의 (1)에서 x를 $-x$로 치환하면 예제 4.20의 마지막 예가 얻어진다.

예제 4.25 (P225) $(-1,1)$에서 수렴하는 멱급수

$$1 - x + x^2 - x^3 \cdots = \frac{1}{1+x} \tag{4.6}$$

의 양변을 미분하고 -1을 곱하면

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \cdots = \frac{1}{(1+x)^2} \tag{4.7}$$

을 얻는다. (4.6)의 양변을 적분하고 적분상수를 맞춰주면

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \cdots = \log(1+x)$$

를 얻는다. (4.7)은 (4.6)을 제곱하여 얻을 수도 있다. ⊣

중복조합의 개수를 생성함수를 써서 구할 수 있다. 예를 들어 X, Y, Z 3 종의 대상에서 중복을 허락하여 n개를 택하는 방법의 개수를 다음의 다항식과 연관지을 수 있다.

$$f(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} (1+x+x^2+\cdots)(1+y+y^2+\cdots)(1+z+z^2+\cdots)$$

$f(x,y,z)$의 전개식의 항들 중에 지수의 합이 n인 것들의 개수가 곧 a_n이다. 즉, 전개식의 모든 항들의 집합을 T로 두면

$$a_n = \left|\{x^p y^q z^r \in T \mid p+q+r = n,\ p,q,r \geq 0\}\right|$$

이다. 따라서

$$f(x,x,x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

이므로 $\vec{a}$의 생성함수가 곧 $f(x,x,x)$가 된다. $1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$ 임을 이용하면 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^3} = {}_3H_0 + {}_3H_1 x + {}_3H_2 x^2 + \cdots$ 를 얻는다. 다시 말해서 $a_n = {}_3H_n$이며 이는 우리가 익히 알고 있던 사실이다.

이번에는 중복조합 중에 각 종류의 대상의 개수에 제한을 둔 것들의 예를 들어 보자.

$$b_n = \left|\{x^p y^q \mid p+q=n,\ 0 \le p \le 2,\ q \ge 1\}\right|$$
로 두면 $\vec{b}$의 생성함수는

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)(x+x^2+x^3+\cdots) &= x\sum_{n=0}^{\infty} x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} x^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= x + 2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(3x^n)\end{aligned}$$

이므로 $(b_0, b_1, b_2, \ldots) = (0, 1, 2, 3, 3, \ldots)$를 얻는다.

<u>예제</u> 4.26 (P227: 4.3.1) 디오판투스 방정식

$$x+y+z=n,\ (x \ge 1, y \ge 2, z \ge 3)$$
의 해의 개수를 a_n이라 할 때 $\vec{a}$의 생성함수를 구하고 a_{100}의 값을 구하여라.

(풀이).

$$\begin{aligned}(x+x^2+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)(x^3+x^4+\cdots) &= x^6(1+x+x^2+\cdots)^3 \\ = \frac{x^6}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_3H_n x^{n+6} &= \sum_{n=6}^{\infty} {}_3H_{n-6} x^n\end{aligned}$$

$\therefore a_{100} = {}_3H_{100-6} = \binom{96}{94} = \binom{96}{2} = 4,560$ ⊣

<u>예제</u> 4.27 (P227: 4.3.2) 디오판투스 방정식

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 25,\ (\forall i)(2 \le x_i \le 6)$$
의 해의 개수를 구하여라.

(풀이). 이런 문제는 포함배제의 원리를 사용하여 풀 수도 있지만 여기서는 생성함수를 사용해 보자. 주어진 방정식의 우변이 $n \in \mathbb{N}$일 때 주어진 조건을 만족하는 해의 개수를 a_n이라 하면 $\vec{a}$의 생성함수는

$$(x^2+\cdots+x^6)^7 = x^{14}(1+\cdots+x^4)^7 = x^{14}\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^7$$
그런데

$$(1-x^5)^7 = 1 - \binom{7}{1}x^5 + \binom{7}{2}x^{10} - \binom{7}{3}x^{15} + \cdots$$

$$(1-x)^{-7} = 1 + {}_7H_1 x + {}_7H_2 x^2 + {}_7H_1 x^3 + \cdots$$
이고, 위 두 전개식의 곱에서 x^{11}의 계수를 찾으면 그것이 a_{25}이다. 따라서

$$a_{25} = 1 \cdot {}_7H_{11} - \binom{7}{1}{}_7H_6 + \binom{7}{2}{}_7H_1 = 6,055$$
를 얻는다. ⊣

<u>예제</u> 4.28 (P228: 4.3.3) 고정된 $p \in \mathbb{N}$에 대하여

$$x_1 + \cdots + x_p = n,\ (\text{각 } x_i \text{는 홀수})$$
의 양의 정수해의 개수를 a_n이라 할 때

(1) $\vec{a}$의 생성함수를 구하여라.

(2) $p=3$일 때 a_n의 식을 구하여라.

(풀이). (1) $(x+x^3+x^5+\cdots)^p = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^p$

(2) $p=3$일 때 생성함수는

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^3 &= x^3\sum_{k=0}^{\infty} {}_3H_k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_3H_k x^{2k+3}\\ &= {}_3H_0x^3 + {}_3H_1x^5 + {}_3H_2x^7+\cdots\end{aligned}$$

a_n은 x^n의 계수이므로 $2k+3=n$으로 두면 $k=\frac{n-3}{2}$이므로 ${}_3H_k = {}_3H_{\frac{n-3}{2}} = \binom{\frac{n+1}{2}}{2}$이므로

$$a_n = \begin{cases}\binom{\frac{n+1}{2}}{2}, & \text{if } (\exists k\ge 0)(n=2k+3),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$ ⊣

예제 4.29 (P231: 4.3.6) 생성함수를 이용하여 피보나치 수열 $\langle f_n\rangle_{n=0}^{\infty}$의 일반항을 구하여라.

(풀이). 이 수열의 생성함수를 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n$으로 둔다. 생성함수를 구하기 위하여 이것에 대한 방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned}g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n &= f_0+f_1x+\sum_{n=2}^{\infty}(f_{n-1}+f_{n-2})x^n\\ &= f_0+f_1x+\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}x^n \qquad (*)\end{aligned}$$

그런데

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}x^n &= x\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} f_nx^n = x(g(x)-f_0)\\ \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}x^n &= x^2\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}x^{n-2} = x^2\sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n = x^2g(x)\end{aligned}$$

이므로 이를 $(*)$에 대입하면, 그리고 $f_0=f_1=1$을 사용하면

$$\begin{aligned}&g(x) = 1+x+x(g(x)-1)+x^2g(x) = 1+xg(x)+x^2g(x)\\ &g(x)(1-x-x^2)=1\\ &g(x)=\frac{1}{1-x-x^2}\end{aligned}$$

을 얻는다. 여기서 $\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt5}{2}$로 두면 (참고로 α, β는 $1-x-x^2=0$의 해가 아니다.)

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{1-\beta x}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nx^n - \beta\sum_{n=0}^{\infty}\beta^nx^n\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)x^n\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$ 이다. $\dashv$

예제 4.30 (P232: 4.3.7) 생성함수를 이용하여 $a_0 = 1$, $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$, $(n \geq 1)$ 으로 정의되는 수열 $\langle a_n \rangle_n$ 의 일반항을 구하여라. (힌트). 생성함수 $g(x)$ 에 대한 방정식을 세운 다음 이를 풀어 생성함수의 식을 얻는다. $\dashv$

정의 4.31 (지수생성함수) 수열 $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ 의 지수생성함수(*exponential generating function*)는

$$a_0 \frac{x^0}{0!} + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

를 뜻한다. 즉, a_n 은 그것의 지수생성함수의 n 차 항의 계수에 $n!$ 을 곱하여 얻어진다. $\dashv$

예제 4.32 (P236)

(1) 수열 $({}_kP_0, {}_kP_1, {}_kP_2, \ldots)$ 의 생성함수는 닫힌 형식으로 표현할 수 없으나 지수생성함수 ${}_kP_0 \frac{x^0}{0!} + {}_kP_1 \frac{x^1}{1!} + {}_kP_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots$ 는 닫힌 형식 $\binom{k}{0}x^0 + \binom{k}{1}x^1 + \binom{k}{2}x^2 + \cdots = (1+x)^k$ 로 쓸 수 있다.

(2) 수열 $(1, 1, 1, \ldots)$ 의 생성함수는 $\frac{1}{1-x}$ 이고 지수생성함수는 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ 이다.

(3) 수열 $(1, a, a^2, \ldots)$ 의 생성함수는 $\frac{1}{1-ax}$ 이고 지수생성함수는 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}$ 이다. $\dashv$

생성함수가 중복조합의 개수를 세는 데 유용했듯이 지수생성함수는 중복순열의 개수를 세는 데 유용하다. 예를 들어 3-집합 $\{X, Y, Z\}$ 의 n-중복순열의 개수를 a_n 이라 했을 때 우리는 $a_n = \sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!q!r!}$, $(n \geq 0)$ 임을 안다. 그런데

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) \\
&\quad = 1 + \left(\sum_{p+q+r=1} \frac{1}{p!q!r!} x^p x^q x^r\right) + \left(\sum_{p+q+r=2} \frac{1}{p!q!r!} x^p x^q x^r\right) + \cdots \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q+r=n} \frac{1}{p!q!r!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!q!r!}\right) \frac{x^n}{n!} \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

이고, 이는 곧 $\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^3 = (e^x)^3 = e^{3x} \overset{\text{def}}{=} G(x)$ 이 수열 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 의 지수생성함수임을 의미한다. $G(x)$ 를 이용하여 a_4 를 구해 보자. $G(x)$ 의 x^4-항은

$$e^{3x} = 1 + (3x) + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^4}{4!} + \cdots$$

로부터 $3^4 \cdot \frac{1}{4!}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $a_4 = 3^4 = {}_3\Pi_4$ 이다.

예제 4.33 (P237) $k \geq 1$, $n \geq 0$ 에 대해서 k-집합 $\{X_1, \ldots, X_k\}$ 의 n-중복순열들 중에 각 X_i 가 짝수 개 들어 있는 것들의 개수를 a_n 이라 하면 $\langle a_n \rangle_n$ 의 지수생성함수는

$$\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^k = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^k$$

이다. 3-집합의 6-중복순열 중에 각 대상이 짝수 개 나타나는 것들의 개수를 구해 보자.

$k=3$일 때의 지수생성함수는 $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}) \stackrel{\text{def}}{=} G(x)$이다. 이것의 멱급수 전개식에서 x^6의 계수를 구하고 여기에 $6!$을 곱하면 a_6가 나온다. $G(x)$의 전개식에서 6차항은

$$\frac{1}{8}\left(\frac{(3x)^6}{6!}+3\frac{x^6}{6!}+3\frac{(-x)^6}{6!}+\frac{(-3x)^6}{6!}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{6!}\cdot\left(3^6+3\right)x^6 = \frac{732}{4}\cdot\frac{1}{6!}x^6$$

이다. 따라서 $a_6 = \frac{732}{4} = 183$이다.

이번에는 a_6를 지수생성함수를 쓰지 않고 구해 보자. a_6는

$$(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+y^2+y^4+y^6+\cdots)(1+z^2+z^4+z^6+\cdots)$$

의 전개식에서 차수가 6인 항들을 골라 x,y,z의 순서를 뒤섞어 만들 수 있는 문자열들의 개수이다. 차수가 6인 항들은

$$x^6, y^6, z^6, x^4y^2, x^4z^2, x^2y^4, x^2z^4, y^4z^2, y^2z^4, x^2y^2z^2$$

이다. 각 항에서 x,y,z의 순서를 뒤섞어 얻을 수 있는 문자열의 개수는

$$1,\ 1,\ 1,\ \frac{6!}{4!2!},\ \frac{6!}{4!2!},\ \frac{6!}{2!4!},\ \frac{6!}{2!4!},\ \frac{6!}{4!2!},\ \frac{6!}{2!4!},\ \frac{6!}{2!2!2!}$$

이고, 이들을 다 더하면 $3+6\cdot\frac{6\cdot5}{2}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{8} = 3+90+90 = 183$으로 앞서의 결과와 같다. ⊣

<u>예제</u> 4.34 p238: 4.3.9, 4.3.10 ⊣

5 최적화

5.1 최적배당문제

5.2 최적게임전략

6 그래프

6.1 기본 개념

그래프는 꼭짓점과 그들을 잇는 변으로 이루어진 도형이며 집합론적으로는 다음과 같이 정의된다.

정의 6.1 그래프(*graph*) G는 순서쌍 $G = (V, E)$로 정의된다.
단, V는 공아닌 유한집합, E는 V의 2중복조합의 다중집합이다.
V의 원소를 꼭짓점(*vertex, or node*), E의 원소를 변(*edge*)이라 한다.
$\{x, y\} \in E$는 꼭짓점 x와 y를 잇는 변을 의미하며 이를 $[x, y]$로 나타낸다. ⊣

정의 6.2 꼭짓점의 개수를 v_G, 변의 개수를 e_G로 나타낸다. v_G를 G의 위수라고 한다. 혼동의 우려가 없을 때는 v_G와 e_G를 간단히 v와 e로 나타낸다.
$[x, y] \overset{\text{def}}{=} a \in E$일 때 x와 y는 인접하다고 한다. 이때 a는 x, y에 물려있다고 하고 x와 y는 a를 물고있다고 한다.
꼭짓점 x와 인접한 모든 꼭짓점들의 집합을 $N_G(x)$로 나타내고 x의 이웃(*neighborhood*)이라고 부른다.
x와 y를 잇는 변이 2개 이상 있을 때는 이 변들을 다중변이라고 하고 $[x, y]_1$, $[x, y]_2$ 등으로 나타낸다. $\{x, x\}$ 형태의 변을 고리라고 한다. 다중변과 고리가 없는 그래프를 단순그래프라 한다. ⊣

정의 6.3 $G = (V, E)$가 그래프라 하자. $x \in V$일 때 $G - x$는 V에서 x를 제거하고 E에서 x에 물려있는 모든 변을 제거하여 얻은 그래프를 $G - x$로 나타낸다. $W \subseteq V$일 때 $G - W$는 V에서 W의 모든 원소를 제거하고 E에서 W의 원소에 물려있는 모든 변을 제거하여 얻은 그래프를 $G - W$로 나타낸다.
$F \subseteq E$일 때 $G - F$는 $(V, E - F)$를 뜻한다. $G - \{a\}$는 간단히 $G - a$로 나타낼 수 있다. ⊣

정의 6.4 꼭짓점 x에 물려있는 변의 개수를 x의 차수(*degree*)라고하고 $d(x)$로 나타낸다. 차수가 0인 꼭짓점을 고립점(*isolated node*)이라고 한다. 차수가 1인 꼭짓점을 단말점(*terminal node*)이라고 한다. 고리 하나는 그것을 물고 있는 꼭짓점의 차수에 2만큼 기여한다.
그래프 G의 차수의 최솟값을 δ_G로 나타낸다.
차수가 짝수인 꼭짓점을 짝수점, 차수가 홀수인 점을 홀수점이라 한다. ⊣

정리 *6.5 위수 ≥ 2인 단순그래프에서는 차수가 같은 꼭짓점 2개 이상 존재한다.*

(증명). n에 대한 귀납법을 사용한다. $n = 2$인 경우에는 $e = 0$ 또는 $e = 1$일 것인데 두 경우 모두 두 꼭짓점의 차수는 같다.
차수가 0인 꼭짓점이 있을 때는 귀납가설에 의하여 $G - x$에 차수가 같은 꼭짓점이 2개 이상 존재하므로 wlog 차수는 모두 양수라고 가정한다.
$V = \{x_1, \ldots, x_n\}$으로 놓으면 각 x_i는 자기 자신을 제외한 꼭짓점 하나 이상과 인접하므로 $1 \leq d(x_i) \leq n - 1$이다. $d(x_1), \ldots, d(x_n)$은 모두 $\{1, \ldots, n - 1\}$의 원소이므로 비둘기집의 원리에 의하여 $d(x_i) = d(x_j)$인 $i \neq j$가 존재한다. □

정리 *6.6* 모든 그래프에서 꼭짓점의 차수의 합은 변의 개수의 *2*배이다. 즉

$$\sum_{x\in V} d(x) = 2e$$

이다.

(증명). 각 변은 차수의 합에 2씩 기여한다. (변이 고리일 때와 아닐 때로 나누어 생각하여 확인한다.) 그러므로 차수의 합은 $2e$이다. □

정리 *6.7* 모든 그래프에서 홀수점의 개수는 짝수이다.

(증명). 홀수 개의 홀수를 더하면 홀수이다. 따라서 홀수점의 개수가 홀수라면 모든 차수의 합은 홀수가 된다. 하지만 모든 차수의 합은 $2e$이므로 홀수일 수 없다. □

정의 6.8 그래프 $G_1 \overset{\text{def}}{=} (V_1, E_1)$에서 $G_2 \overset{\text{def}}{=} (V_2, E_2)$로 가는 동형사상이란 전단사함수 $f : V_1 \to V_2$로서

$$(\forall x, y \in V_1)([x, y] \in E_1 \leftrightarrow [f(x), f(y)] \in E_2)$$

를 만족하는 것을 말한다. 두 그래프 사이에 동형사상이 존재할 때 이 두 그래프를 서로 동형이라 한다. ⊣

단평 6.9 그림으로 나타낸 두 그래프가 동형임을 보일 때는 다음과 같이 한다: 하나의 그래프의 꼭짓점들을 $x_1, \ldots, x_n$으로 이름 붙이고, 다른 그래프의 꼭짓점들에 적당히 $x'_1, \ldots, x'_n$으로 이름을 붙여 x_i와 x_j가 인접할 때면이 x'_i와 x'_j가 인접하도록 하면 된다.

동형이 아님을 보일 때는 모든 전단사함수가 동형사상이 아님을 보이는 것은 작업량이 너무 많으므로 좋은 방법이 아니다. 그것보다는 한 그래프가 가지는 어떤 "성질"이 다른 그래프에는 없음을 보이도록 한다. "성질"의 예로는 아주 간단한 것으로는 v, e 등이 있으며, 조금 복잡한 것으로는 "차수가 k인 꼭짓점이 m개 존재한다.", "고리의 개수가 k이다.", "k중변의 개수가 m이다.", "삼각형이 k개 있다.", "임의의 두 변이 인접하다" 등이 있다. ⊣

그래프의 성질을 나타내는 것으로 유용한 것 중 하나가 차수열이다. 이것은 그래프의 곡짓점을의 차수를 내림차순으로 배열한 수열이다. 동형인 그래프는 동일한 차수열을 가지지만 이것의 역은 일반적으로 참이 아니다. (예: p279 하단)

정의 6.10 음아닌 정수로 이루어진 내림차순 수열은 그것을 차수열로 가지는 단순그래프가 존재할 때 그래프적이라고 한다. ⊣

음아닌 정수로 이루어진 내림차순 수열이 그래프적인지를 판단하는 가장 간단한 방법은 홀수의 개수를 세는 것이다. 이것이 홀수라면 그래프적이 아니다. 이것이 짝수라면 다른 방법을 사용해야 한다.

정리 *6.11* $k = d_1 \geq d_2 \cdots \geq d_n \geq 0$인 정수 d_i들에 대하여 수열 $\vec{d} \overset{\text{def}}{=} (d)1, \ldots, d_n$이 그래프적일 필요충분조건은

$$\vec{d'} \overset{\text{def}}{=} (d_2 - 1, \ldots, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \ldots, d_n)$$

이 그래프적인 것이다. (d_2에서 시작하여 d_1개의 원소에서 *1*을 뺀다.) 단, $d_1 \geq n$이면 그래프적일 수 없고, $d_2, \ldots, d_{k+1}$ 중에 *0*이 있어 이들 중에 -1로 바뀌는 것이 있어도 역시 안 된다.

(증명). 책에 나온 증명 참조. □

주어진 수열이 그래프적인지 알려면 먼저 홀수의 개수를 세고, 그것이 짝수라면 위의 정리를 이용하여 더 "작은" 수열로 변환한다. 이를 반복하여 충분히 작은 수열(모든 원소가 1 또는 0인 수열)을 얻게 되면 쉽게 답을 할 수 있을 것이다.

그래프적인 것으로 판명된 수열이 주어졌을 때 이것을 차수열로 가지는 그래프를 구성할 줄 알아야 한다. p283의 예는 그림이 조금 틀려있지만 아이디어는 맞다.

정의 6.12 그래프의 변 $[x, y]$에 $[x \to y]$ 또는 $[x \leftarrow y]$와 같이 방향을 준 것을 유향변이라 하고, 모든 변이 유향변인 그래프를 유향그래프라고 한다. (주의: 하나의 변에 방향을 양쪽으로 다 줄 수는 없다.)

두 유향변이 $\to \bullet \to$ 형태로 이어져 있을 때 이 두 유향변은 순접한다고 말한다. ⊣

정의 6.13 $G \overset{\text{def}}{=} (V, E)$가 주어졌을 때, 어떤 $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$에 대해서 $G' \overset{\text{def}}{=} (V', E')$이 그래프라면 이 G'을 G의 부분그래프라고 한다. 부분그래프의 개념은 유향그래프에도 그대로 적용된다. $V' = V$인 부분그래프를 생성부분그래프라고 한다. ⊣

정의 6.14 그래프에서 경로(*path*)란 인접한 변들의 열을 뜻한다. 유향그래프에서 경로란 순접한 변들의 열을 뜻한다. 경로의 길이는 경로를 이루는 변의 개수를 말하며 이때 동일한 변이 두 번 이상 나타나면 모두 카운트한다. 길이가 0인 경로는 허용하지 않는다.

꼭짓점 x에서 출발하여 y에서 끝나는 경로를 (x, y)-경로라고 한다.

출발점이 끝점과 일치하는 경로를 폐로(*closed path*)라고 한다. 동일한 변이 두 번 이상 나타나지 않는 폐로를 회로(*circuit*)라고 한다. 동일한 꼭짓점이 두 번 이상 나타나지 않는 회로를 바퀴(*cycle*)라고 한다. 양 끝점을 포함한 모든 꼭짓점이 다른 경로를 직선경로(*line path*)라고 한다. ⊣

정리 *6.15* 단말점이 없는 그래프는, 아래의 조건 중 어느 하나가 충족된다면, 회로를 가진다.

- 고립점이 없다.
- $e \geq 1$
- 연결그래프이고 $v \geq 2$ (연결그래프의 정의는 강의노트 *56*쪽에 있음.)

(증명). 책의 증명을 참조할 것. (위의 3 조건은 증명의 어느 부분에 사용되는가?) □

연습문제 6.16 (p286)

(*a*) #1

(*b*) #2 (1), (2)의 명제들이 필요이상으로 복잡하다. 동등하고 더 간단한 명제로 바꾸어 증명할 것.

(*c*) #3 부등식만 가지고는 답이 되지 않는다. 그래프의 예를 들어야 한다.

(1) $\sum_{x \in V} d(x) = 2e$를 이용할 것.

(2)는 최대값을 최솟값으로 바꿀 것. (힌트: 주어진 위수 v를 가지는 그래프가 변을 최대 몇 개까지 가질 수 있겠는가?)

(d) #9, #10, #11

6.2 여러가지 그래프

정의 6.17 임의의 두 꼭짓점이 인접한 단순그래프를 완전그래프(*complete graph*)라고 하고 위수가 $n \geq 1$인 완전그래프를 K_n으로 나타낸다. (K_1은 변을 가지지 않는다.)

모든 꼭짓점의 차수가 동일한 그래프를 정칙그래프(*regular graph*)라고 한다. 꼭짓점의 차수가 r로 일정한 그래프를 r-정칙그래프라고 한다. ⊣

정의 6.18 임의의 두 꼭짓점 $x \neq y$에 대하여 (x, y)-경로가 존재하는 그래프를 연결그래프(*connected graph*)라고 한다.

그래프 $G \overset{\text{def}}{=} (V, E)$의 연결부분그래프 $G'(V', E')$로서 더 이상의 꼭짓점을 추가하면 연결성이 깨지는, 그리고 E의 원소 중에 V'에 물려있는 모든 변이 E'에 속하는 것을 G의 연결성분(*connected component*)이라 한다. (책에서는 "최대"의 연결부분그래프라고 했지만 최대보다는 "극대"가 옳은 표현이다. 왜냐하면 최대라는 단어는 유일하다는 것을 암시하기 때문이다. 연결성분은 당연히 여러 개 있을 수 있다.)

유향그래프에는 강연결그래프(*strongly connected graph*)라는 개념이 있다. 임의의 서로 다른 두 점 x, y에 대해서 (x, y)-경로와 (y, x)-경로가 모두 존재한다는 뜻이다. ⊣

정의 6.19 연결그래프 G에서 적당한 꼭짓점 n개를 제거함으로써 연결성이 깨지거나 K_1으로 환원되었을 때, 이러한 최소의 n을 점연결도라 하고 $\kappa(G)$로 나타낸다. 연결그래프가 아닌 그래프의 점연결도는 0으로 정의한다.

비슷한 방법으로 변연결도를 정의하고 $\kappa'(G)$로 나타낸다. 변연결도가 1인 그래프에서 그것을 제거하면 변연결도가 0이 되는 변을 그 그래프의 다리(*bridge*)라고 부른다.

정리 *6.20* G가 단순연결그래프(즉, 단순그래프인 연결그래프)라고 한다. 그러면 (*1*) $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta_G$, (*2*) $\kappa(G) \leq \frac{2e}{v}$.

(증명). 책의 증명 참조. □

정의 6.21 그래프 $G \overset{\text{def}}{=} (V, E)$의 V가 X, Y의 두 부분으로 분할되어 모든 변에 대해서 그것을 물고있는 양끝점이 하나는 X에 다른 하나는 Y에 속할 때 이 G를 2분그래프(*bipartite graph*)라고 한다. 이때 (X, Y)를 V의 2분할(*bipartition*)이라고 한다.

이때 X의 임의의 원소와 Y의 임의의 원소가 인접하다면 G를 완전2분그래프라고 한다. $|X| = m$, $|Y| = n$인 완전2분그래프를 $K_{m,n}$으로 나타낸다. ⊣

정리 *6.22* 그래프 G가 *2*분그래프일 필요충분조건은 G의 각 회로의 길이가 짝수일 것이다.

(증명). 책의 증명 참조. □

정의 6.23 모든 변들이 서로를 교차하여 지나가는 일이 없도록 평면 내에 그릴 수 있는 그래프를 평면그래프(*planar graph*)라고 한다.

평면그래프 G에 의하여 분할되는 평면의 구역들을 G의 면(*face*)이라고 한다. 면의 개수는 f_G로 나타낸다. ⊣

평면그래프의 정의는 기하적인 직관을 이용한 것이다. Kuratowski(폴란드의 수학자, 1896-1980)는 평면그래프의 집합론적 정의가 가능하도록 하는 정리를 증명하였다. (p297, 정리 6.2.10)

연결평면그래프에 대하여는 중요한 2개의 정리가 있다.

<u>정리</u> *6.24* (오일러의 공식) 연결평면그래프에서는 다음 등식이 성립한다.

$$v + f = e + 2$$

(증명). e에 대한 귀납법을 사용한다. 책의 증명 참조. □

평면그래프에서는 각 변의 날(*blade*)이라는 개념이 존재한다. 변의 양쪽 가장자리를 날이라고 한다. 면 F와 인접한 날의 개수를 F의 (면)차수라고 한다. 평면그래프 외부도 하나의 면이므로 그것의 차수를 생각할 수 있다. (p295의 그림을 볼 것)

꼭짓점의 차수의 합이 $2e$이듯이 평면그래프에서 차수의 합은 $2e$이며 이 사실은 날의 개념을 사용하여 쉽게 증명된다.

<u>정리</u> *6.25* G가 위수 *3* 이상의 연결평면단순그래프이면

$$v \geq \frac{e}{3} + 2$$

이며 더욱이 G가 *2*분그래프이면

$$v \geq \frac{e}{2} + 2$$

가 성립한다.

(증명). 모든 면의 차수가 3 이상이라는 사실과 오일러의 정리를 이용한다. 책의 증명 참조. □

위의 정리는 쉽게 말하자면 변의 수가 결정되면 꼭짓점의 개수는 어느 한계 이상 작아질 수는 없다는 것이다. 왜냐하면 연결평면단순그래프에서는 꼭짓점의 개수가 줄어들면 차수가 늘어나면서 변들이 서로를 교차하게 되기 때문이다.

위의 정리를 이용하면 K_5와 $K_{3,3}$는 평면그래프가 아님을 쉽게 보일 수 있다. 쿠라토우스키는 이 명제의 역으로 볼 수 있는 정리를 증명하였다.

<u>따름정리</u> *6.26* 평면단순그래프에서는 차수가 *5* 이하인 꼭짓점이 존재한다.

(주의). 책의 명제에는 "단순"성이 빠져있다. 연결성은 wlog 가정할 수 있으므로 여기서는 생략하였다. 증명 중에 정리 6.25를 사용하기 위수가 3 이상임을 가정해야 하는데 이것은 wlog 가능하다.

p300의 #7에 보면 이 따름정리보다 더 강력한 명제를 증명하도록 되어 있다. ⊣

<u>연습문제</u> 6.27 (p300)

(*a*) #1 답이 너무 많으므로 "단순그래프" 등 다양한 조건을 넣어서 답의 개수를 줄여 풀어보라.

(*b*) #2

(*c*) #3에서 $\frac{v^2}{2}$는 $\frac{v^2}{4}$로 바꾸어도 된다.

(*d*) #4

(*e*) #5에서 (1), (2) 중 어느 하나의 조건만 가지고도 주어진 명제를 증명할 수 있다. Wlog 연결그래프를 가정해도 됨을 먼저 보일 것.

(*f*) #7

(*g*) #8 단순성을 가정해야 한다. 단순그래프가 아닌 경우에는 반례가 있다.

6.3 수형도

정의 6.28 회로가 없는 연결그래프를 수형도(*tree*)라 한다. (K_1도 수형도이다.) ⊣

보조정리 *6.29* 다음에 나오는 중요한 정리를 증명할 때 필요하다.

(*1*) 위수 *2* 이상의 수형도는 단말점을 가진다.

(*2*) $e = v - 1 \geq 1$인 연결그래프는 *2*개 이상의 단말점을 가진다. (책에서는 연결성이 빠져 있는데, 연결성을 가정하거나 아니면 고립점이 없음을 가정해야 한다.)

(증명). 책의 증명 참조. □

정리 *6.30* 연결그래프 G에 대하여 아래의 명제들은 모두 동등하다.

(*1*) G는 수형도이다.

(*2*) $e = v - 1$

(*3*) G는 각 변이 다리이다.

(*4*) G의 임의의 두 꼭짓점을 잇는 경로가 유일하게 존재한다.

(증명). 책의 증명을 참조한다. 단, 책에 빠져있는 "연결그래프" 조건이 사용되는 부분에 유의해야 한다. 그리고 (1) ⇒ (2)의 증명에서 $v_H = v = 1$은 $v_H = v - 1$의 오타이다. □

그래프 G의 생성부분그래프로서 수형도인 것을 생성수형도라고 한다.

만일 G가 연결그래프라면 연결성이 깨지지 않는 범위내에서 변을 최대한 제거하면 이 생성부분그래프는 회로가 없을 것이다. 왜냐하면 회로의 한 변을 제거해도 연결성은 깨지지 않기 때문이다. 그렇다면 이 생성부분그래프는 수형도이다. 따라서 연결그래프는 생성수형도를 가진다는 결론을 얻는다.

수형도에서 특정한 하나의 꼭짓점을 지정한 것을 유근수형도(*rooted tree*)라 한다. 왜냐하면 이 꼭짓점을 집어서 들어 올리면 이 그래프는 뒤집힌 나무 형택다 되기 때문이다. 유근수형도에는 (반)순서관계가 존재한다. 이 순서관계에서 한 꼭짓점 x와 인접하여 아래에 있는 꼭짓점들을 자녀(*kid*)라고 한다.

단말점이 아닌 각 점이 모두 일정하게 m개의 자녀를 가지는 유근수형도를 m-진수형도라 한다. 유근수형도에서 뿌리도 아니고 단말점도 아닌 꼭짓점들을 내부꼭짓점(*internal node*)이라 한다.

p309의 예제 6.3.5를 꼭 읽어 볼 것.

<u>연습문제</u> 6.31 (p316)

(*a*) #1

(*b*) #2 (2)에 오타가 있다. $2+\sum_{d_i\geq 3}(d_i-2)$가 맞다. 위수에 대한 귀납법으로 증명된다.

6.4 회로

p319의 아래 부분에 있는 깊이 우선 검색(*depth first search*)에 의하여 주어진 연결그래프의 생성수형도를 찾는 과정을 이해해야 한다.

그래프의 각 변에 적당하게 방향을 주어 강연결 유향그래프로 만들 수 있을 때 이 그래프를 강연결화 가능이라 한다.

p320의 강연결화 가능성을 설명하는 그림은 화살표의 일부가 방향이 틀려 있다.

<u>정리</u> *6.32* 연결그래프 G가 강연결화 가능일 필요충분조건은 G가 다리를 가지지 않을 것이다.

(증명). ($\Leftarrow$) 증명의 첫부분에 wlog 고리를 갖지 않음을 가정해야 한다. p321의 상단 그림에서 (x,y)-경로 γ와 (x,z)-경로 δ를, 이 두 경로가 공유하는 변이 없도록 잡을 수 없다는 것은 "다리를 가지지 않는다"는 조건에 의한 것이라고 설명하고 있는데 이것은 아래의 보조정리를 필요로 한다. □

<u>보조정리</u> *6.33* G가 다리가 없는 연결그래프라면 G의 임의의 서로 다른 세 꼭짓점 x, y, z에 대해서 y에서 출발하여 x를 거쳐 z로 가는, 변을 중복하여 사용하지 않는 경로가 존재한다.

(증명). (이 증명은 한 수강학생이 제공한 것입니다.) "두 꼭짓점 사이의 거리"는 두 꼭짓점을 잇는 최단 경로의 길이인 것으로 정의한다. 단, 두 꼭짓점이 일치할 때는 거리가 0인 것으로 한다. 최단 경로는 변이나 꼭짓점을 중복 사용하지 않음에 주목하라.

"꼭짓점 w와 경로 p 사이의 거리"는 p 상에 있는 꼭짓점들과 w 사이의 거리 중 가장 작은 값을 말한다. 이제 다음의 주장을 증명하면 충분하다.

Claim: 변을 중복하여 사용하지 않는 (y,z)-경로 중에 x 까지의 거리가 0인 것이 있다.

변을 중복하여 사용하지 않는 (y,z)-경로 중에 x까지의 거리가 최소인 것울 p_{yz}라 하자. x와 p 간의 거리가 $d>0$이라고 가정하고 모순을 유도하면 된다. p_{yz} 위의 점 중에 x까지의 거리가 d인 것을 취하여 w라 둔다. x에서 w까지의 최단경로를 p_{xw}라 하자. 이 경로는 길이가 d이다. p_{xw} 위의 꼭짓점 중에 w와 인접한 것을 v라 하자. p_{xw}는 변이나 꼭짓점을 중복사용하지 않으므로 $v\neq w$이고, x와 v 사이의 거리는 $d-1$임을 알 수 있다. 따라서 v는 p_{yz}에 속하지 않는다.

$[v,w]$는 다리가 아니므로 $G-[v,w]$는 연결그래프이다. 따라서 p_{yz} 위의 각 꼭짓점마다 v에서 이 꼭짓점에 이르는 $G-[v,w]$ 경로가 존재한다. 이들 중에 가장 길이가 작은 것을 취하고, 그때의 p_{yz} 위의 꼭짓점을 w'으로 둔다. 이때 v와 w'을 잇는 경로를 $p_{vw'}$으로 둔다.

이 경로의 변들과 $[v,w]$와 p_{yz}의 변들 중에 중복되는 것은 하나도 없다. 이때 w'이 w, y, z 중의 어느 것과 일치할 수도 있지만 이것은 하등의 문제를 일으키지 않음에 주목하라.

p_{yz}에서 (w',w)-경로를 제거하고, $p_{vw'}$과 $[v,w]$를 넣으면 이것은 G 내에서의 (y,z)-경로가 된다. 이 경로는 변을 중복 사용하지 않으며 x까지의 거리가 $d-1$ 이하이다. 이는 d의 최소성에 모순된다. □

정의 6.34 그래프 G의 각 변을 단 한번씩만 지나는 (그리고 모든 변을 지나는) 경로를 G의 오일러경로라고 한다. 오일러경로 중에 회로인 것을 오일러회로라고 한다. 오일러 회로를 가지는 그래프를 오일러그래프라고 한다. ⊣

정리 *6.35* 연결그래프 G가 오일러그래프일 필요충분조건은 G의 모든 꼭짓점이 짝수점일 것이다.

(증명). 책의 증명을 참조한다. 단, 증명 중에 각 G_i가 C와 1개 이상의 꼭짓점을 공유해야 하는 이유는, 만일 그렇지 않다면 G의 연결성이 깨지기 때문이다. □

예제 6.36 위수가 3 이상의 홀수인 완전그래프는 오일러그래프이다.

(증명). 책의 증명을 참조한다. □

따름정리 *6.37* 연결그래프가 오일러회로가 아닌 오일러경로를 가질 필요충분조건은 홀수점이 딱 *2*개일 것이다. 이때 이 두 홀수점이 오일러경로의 양 끝점이 된다.

(증명). 책의 증명을 참조한다. □

정의 6.38 그래프 G의 각 꼭짓점을 모두 지나되 단 한 번씩만 지나는 회로를 G의 해밀턴회로라고 한다. 해밀턴회로를 가지는 그래프를 해밀턴그래프라 한다. ⊣

단평 6.39 해밀턴회로를 가질 여러 조건들이 책에 나와 있는데 이들은 오일러회로에 대한 것보다 훨씬 더 복잡하다. ⊣

연습문제 6.40 p335 #1

-end-

찾아보기